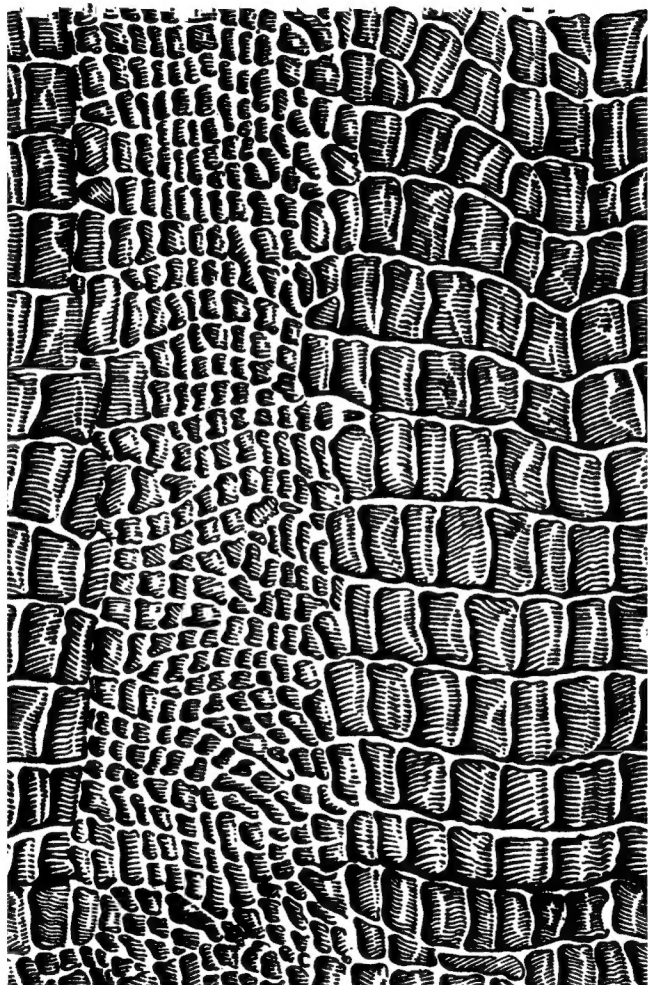
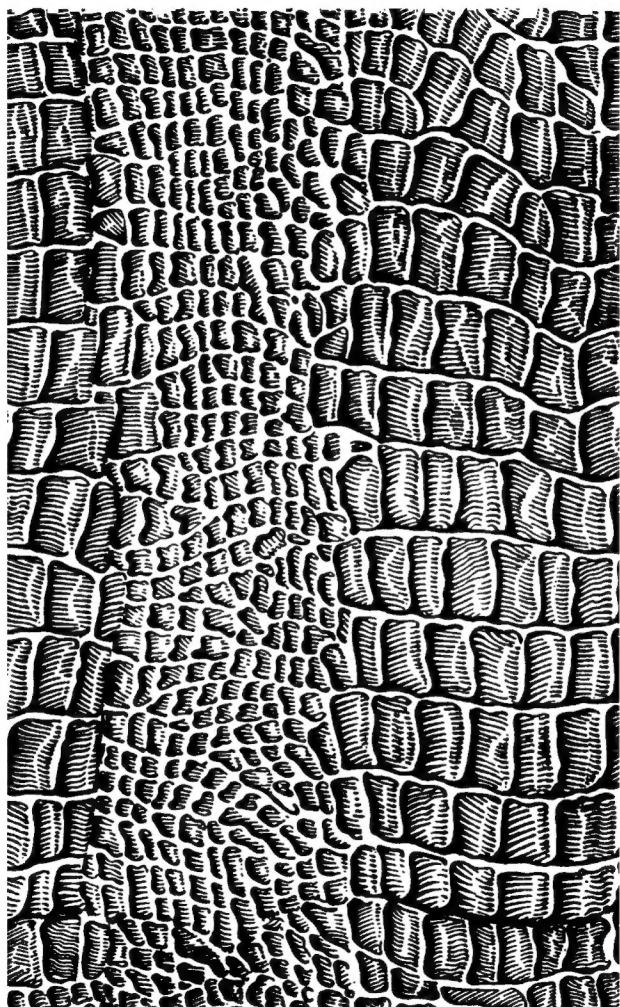


Sp.Col.
510
R9611
V.1-2
1958





أُصُولُ الرِّيَاضِيَّاتِ

جامعة الدول العربية
الإدارة الثقافية

مكتبة
لدراسات الفلسفية

برتراند رسل

أصول الرياضيات

١

ترجمة

الدكتور أحمد فؤاد الأهواني

و

الدكتور محمد مرسى أحمد

دار المعارف بمصر

مقدمة الطبعة الثانية

دون معظم ما جاء فى كتاب « مبادئ الرياضة » سنة ١٩٠٠ ، ونشر سنة ١٩٠٣ ، فنوقشت الموضوعات التى تناولها مناقشة واسعة خلال السنوات التالية ، وتحسنت صفة المنطق الرياضى تحسناً كبيراً ، وظهرت مسائل جديدة ، وبقيت مسائل أخرى قديمة بغير حل ، واتخذت بعض المسائل صوراً جديدة مع بقائها موضع البحث والجدل ، وفى ضوء هذه الظروف رأيت ألا فائدة من محاولة إصلاح هذه المسألة أو تلك فى الكتاب الذى لم يعد يعبر عن آرائى الحاضرة . أما قيمة الكتاب الآن فهى قيمة تاريخية من جهة أنه يمثل مرحلة معينة فى تطور الموضوع الذى يعالجه . من أجل ذلك لم أغير فيه شيئاً ، ولكننى سأحاول فى هذه المقدمة أن أعلن عن الأمور التى لا أزال أتمسك بالآراء التى يعبر عنها الكتاب ، وعن الأمور الأخرى التى أظهرت للمباحث الجديدة أننى كنت فيها على خطأ .

إن القضية الأساسية التى تجرى خلال صفحات الكتاب ، وهى أن الرياضة والمنطق متطابقان ، من القضايا التى لا أجد سبباً منذ إعلانها لتعديلها . وقد كانت هذه القضية أول الأمر غير مألوفة لارتباط المنطق ارتباطاً ماثوراً بالفلسفة وأرسطو ، بحيث شعر الرياضيون أن الاشتغال به خارج عن نطاق عملهم ، وبرم الذين يعتبرون أنفسهم مناطق حين طلب منهم تعلم الفن الرياضى الجديد الصعب ، غير أن هذه المشاعر لم تكن ليوم أثرها لو أنها عجزت عن التماس العون فى أسباب أعمق للشك ، وهذه الأسباب هى بصفة عامة من نوعين متقابلين : الأول أن ثمة صعوبات معينة فى المنطق الرياضى لم تحل بعد ، مما يجعله يظهر أقل يقيناً مما كان يعتقد فى الرياضة ، والثانى أننا إذا قبلنا الأساس المنطقى للرياضة ، فإن ذلك يررر أو يميل إلى تبرير كثير من البحث ، مثل الذى قام به «جورج كانتور» والذى ينظر إليه كثير من الرياضيين بعين الشك

على أساس المتناقضات التي لم تحل والتي تشترك مع المنطق . هذان التياران المتقابلان من النقد يمثلهما أصحاب المذهب الصوري وعلى رأسهم « هلبرت » ، وأصحاب المذهب الحدسي وعلى رأسهم « بروار » (Brouwer)

وليس التأويل الصوري للرياضة جديداً بأي حال ؛ ولكننا لتحقيق أغراضنا قد نتجاهل صورها القديمة . ويقوم هذا التأويل ، كما يقدمه « هلبرت » مثلاً في مجال العدد ، على ترك الأعداد الصحيحة بغير تعريف مع التسليم في شأنها ببديهيات تجعل استنتاج القضايا العددية العادية ممكناً . وبعبارة أخرى لا نعين أى معنى لهذه الرموز ٠ ، ١ ، ٢ . . . فيما عدا أن لها بعض الخصائص المحدودة في البديهيات . يجب إذن اعتبار هذه الرموز على أنها متغيرات . ويمكن تعريف الأعداد الصحيحة الأخيرة حين يعطى الصفر ، أما الصفر فيجب أن يكون مجرد شيء له الخصائص المعينة . وتبعاً لذلك لا تمثل الرموز ٠ ، ١ ، ٢ . . . سلسلة واحدة محدودة ، بل أى متوالية كانت . وقد غفل الصوريون عن أن الأعداد مطلوبة للحصول على الجمع فقط ، بل للعد أيضاً . فهذه القضايا مثل : « وجد ١٢ رسولا » أو « فى لندن ٦,٠٠٠,٠٠٠ من السكان » لا يمكن تأويلها فى نظامهم . لأن الرمز « ٠ » قد يؤخذ على أنه يعنى أى عدد صحيح متناه ، دون أن يترتب على ذلك أن تكون أى بديهية من بديهيات « هلبرت » كاذبة . وهكذا يصبح كل عدد رمزى مبهماً إلى ما لا نهاية له فى الإبهام . وبشبه الصوريون صانع الساعات الذى يستهويه عمل ساعات ذات شكل جميل ، فيغفل عن غرضه الأصلى من صناعتها للدلالة على الوقت ، ولا يضع فيها أى آلات .

وهناك صعوبة أخرى فى موقف الصوريين تختص بالوجود . ذلك أن « هلبرت » يزعم أنه إذا كانت سلسلة البديهيات لا تفضى إلى تناقض ، فلا بد من وجود سلسلة من الأشياء تحقق البديهيات . وتبعاً لذلك فإنه بدلا من البحث عن إقامة نظريات وجودية بضرب الأمثلة ، يشغل نفسه بطرق إثبات خلو بديهياته من التناقض . وعنده أن « الوجود » كما يفهم عادة هو تصور ميتافيزيقي لا لزوم له ، يجب أن يحل محله تصور آخر دقيق وهو عدم التناقض . وهو هنا

ينسب أن للحساب فوائد عملية ، وأنه لا نهاية للنظم القائمة على بدسيات عدم التناقض ، والتي يمكن اختراعها . أما الأسباب التي من أجلها نخفل بوجه خاص بالبدسيات التي تفضي إلى الحساب العادى فإن هذه الأسباب تقع خارج الحساب ، وتتصل بتطبيق العدد على المواد الحسية ، وهذا التطبيق نفسه لا يكون جزءاً من المنطق أو الحساب ، ولكن النظرية التي تذهب إلى القول أولاً باستحالة هذا التطبيق لا يمكن أن تكون صحيحة ، ذلك أن التعريف المنطقي للأعداد يجعل صلتها بالعالم الواقعي المكون من أشياء معدودة أمراً مفهوماً ، على حين أن نظرية الصوريين لا تجعلها كذلك .

أما النظرية الخلسية التي مثلها أولاً « بروار » ثم بعد ذلك « فايل » Weyl فهي أعظم خطراً . وهناك فلسفة مرتبطة بهذه النظرية نستطيع أن نتجاهلها حتى لا نحيد عن غرضنا ، لأن أثرها في المنطق والرياضة هو الذى يعنينا ، والنقطة الأساسية في هذا الصدد هي رفض اعتبار القضية صادقة أو كاذبة حتى نستقر على طريقة تحدد أى وجهة منهما . وينكر « بروار » قانون الثالث المرفوع حيث لا توجد مثل تلك الطريقة . وهذا يهدم مثلاً البرهان القائل بأن هناك أعداداً حقيقية أكثر من الأعداد النسبية ، وأن كل متوالية في سلسلة الأعداد الحقيقية لها نهاية . وترتب على ذلك أن أجزاء كبيرة من التحليل التي ظن لقرون كثيرة أنها تقوم على أساس وطيء قد أصبح مشكوكاً فيها .

ويرتبط بهذه النظرية المذهب المسمى بالنهاية Finitism ، والذي يضع موضع الشك القضايا التي يدخل فيها مجموعات لا نهائية أو سلاسل لا نهائية على أساس أن تلك القضايا لا يمكن تحقيقها . وهذا المذهب مظهر من مظاهر التجريبية السائدة ، ويجب إذا حملناه على محمل الجد أن يفضى إلى نتائج أكثر هدماً مما يعترف به أنصاره ، فالناس مثلاً ولو أنهم يكونون فصلاً متناهياً ، فمن المستحيل من الناحية العملية والتجريبية عدمهم ، كما لو كان عددهم لا نهائياً . ولو سلمنا مبدأ أصحاب النهاية فلا ينبغي أن نقرر أى عبارة هامة — مثل « جميع الناس قانون » — تلور حول مجموعة تعرفها خصائصها ، ولا

يذكر بالفعل في تعريفها جميع أفرادها . وهذا قد يمسح بحجة قلم جميع العلوم وجميع الرياضيات ، وليس فقط تلك الأجزاء التي يعتبرها الحدسيون موضع شك . ومع ذلك فلا يمكن اعتبار النتائج المفجعة دليلاً على فساد المذهب ، وإذا كان لا بد من إقامة الدليل على فساد مذهب النهائية ، فلماذا يكون ذلك بمواجهته بنظرية كاملة في المعرفة . ولست أعتقد شخصياً في صحته ، ولكني لا أظن أن رداً قصيراً سهلاً على ذلك المذهب أمر ممكن .

ويجد القارئ مناقشة بدیعة وكاملة لمسألة تطابق الرياضة والمنطق أو عدم تطابقهما في المجلد الثالث من كتاب جورجسن Jørgensen « رسالة في المنطق الصوري » ص ٥٧ - ٢٠٠ ، حيث يجد فحصاً جدياً للحجج التي أثبتت ضد هذه القضية ، وانتهى المؤلف إلى نتيجة - هي بوجه عام ما أعتقد - وهي أنه على الرغم من ظهور أدلة جديدة في السنوات الأخيرة ترفض رد الرياضة إلى المنطق ، فلا شيء من هذه الأدلة حاسم بأي حال .

وهذا يقضي بنا إلى تعريف الرياضة الذي نستعمل به هذا الكتاب ، وهو تعريف لا بد من إجراء تعديلات متعددة عليه . فأولا الصورة « و يلزم عنها ل » ليست إلا صورة من صور منطقية كثيرة يمكن أن تتخذها القضايا الرياضية . وقد انتهيت في الأصل إلى تأكيد هذه الصورة من اعتبار الهندسة . وكان من الواضح أن الهندسة الأقليدية وغير الأقليدية على السواء يجب أن تدخل في الرياضة البحتة ولا يجب اعتبارهما متناقضتين فيما بينهما . فعلياً أن نحكم فقط بأن البديهيات يلزم عنها القضايا ، لا أن البديهيات صادقة فالقضايا صادقة تبعاً لذلك . وقد أفضت بي مثل هذه الحالات إلى المغالاة في قيمة التزوم مع أنه ليس إلا واحداً من جملة دوال الحقيقة ، وليس أكثر أهمية من غيره . ثم حين قلت : « و ل » قضيتان تشتملان على متغير واحد أو جملة متغيرات فالأصح بالطبع أن نقول إنها دوال قضايا . ومع ذلك فيمكن الاعتذار عما قيل على أساس أن دوال القضايا لم تكن قد عرفت بعد ، ولم تكن مألوفاً عند المناطقة أو الرياضيين .

وأنقل بعد ذلك إلى أمر أكثر خطراً ، وهو قول : « علماً بأن كلا من
 و ، لا تشتمل على ثوابت غير الثوابت المنطقية » . وأرجى بعض الوقت
 مناقشة الثوابت المنطقية ما هي . ولأسلم بأن هذه الثوابت معروفة كي أعرض
 هذه المسألة ، وهي أن اختفاء الثوابت غير المنطقية ولو أن ذلك شرط ضروري
 في الصفات الرياضية في القضية إلا أنه شرط غير كاف . ولعل أفضل الأمثلة
 على هذا أن نذكر بعض القرارات المتعلقة بعدد الأشياء في العالم ، خذ مثلاً
 « يوجد في العالم ثلاثة أشياء على الأقل » . فهذا يساوي قولك : « يوجد ثلاثة
 أشياء س ، ص ، هـ ، وخاصيات Φ ، Ψ ، X ، بحيث تكون س لاصراً لها
 الخاصية Φ ، س لاه لها الخاصية Ψ ، ص لاه لها الخاصية X » . هذا القول
 يمكن التعبير عنه بعبارات منطقية بحتة ، ويمكن إثباته منطقياً عن فصول فصول
 فصول ، يجب أن يوجد منها في الواقع على الأقل أربعة حتى ولو لم يوجد العالم .
 لأنه في تلك الحالة قد يوجد فصل واحد هو الفصل الصفري ؛ وفصلاً فصول
 هي فصل اللافصول ، والفصل الذي حده الوحيد هو الفصل الصفري ؛ وأربعة
 فصول لفصول فصول هي الفصل الصفري ، والفصل الذي حده الوحيد هو
 الفصل الصفري ، والفصل الذي حده الوحيد هو الفصل الذي حده الوحيد هو
 الفصل الصفري ، والفصل الذي هو مجموعة الفصلين الآخرين . ولكن في
 الأصناف الدنيا ، أي تلك الخاصة بالأفراد ، وبالفصول ، وبفصول الفصول ،
 لا يمكن منطقياً إثبات وجود ثلاثة أعضاء على الأقل . علينا أن نتوقع شيئاً
 من هذا القبيل وذلك لطبيعة المنطق ذاته ، لأن المنطق يهدف إلى الاستقلال
 عن الواقع التجريبي ، ووجود الكون هو واقع تجريبي . حقا لو أن العالم لم
 يوجد ما وجدت كتب المنطق ، ولكن وجود كتب المنطق ليس مقدمة من
 مقدمات المنطق ، ولا يمكن استنتاجه من أي قضية لها الحق في أن تسطر في
 هذه الكتب .

إن مقداراً كبيراً من الرياضة ممكن عملياً دون التسليم بوجود أي شيء ،
 فجميع الحساب الأولى المتعلقة بالأعداد الصحيحة المتناهية والكسور الاعتيادية

يمكن تركيبه ، ويصبح ذلك مستحيلا عند ما يتطلب الأمر فصولا لامتناهية من الأعداد الصحيحة ، وهذا يستبعد الأعداد الحقيقية وجميع التحليل ، فإذا أردنا أن يشتمل الحساب عليهما احتجنا إلى « بديهية اللانهاية » التي تقرر أنه إذا كانت ω أى عدد متناه ، فهناك على الأقل فصل واحد له ω كأفراد . وفي الوقت الذي كتبت فيه « الأصول » ، ^(١) افترضت إمكان إثبات ذلك ، فلما نشرت مع الدكتور هابشيد كتاب "Principia Mathematica" أصبحنا مقتنعين بأن ذلك البرهان المزعوم خاطئ .

وتعتمد الحجة السابقة على مذهب الأصناف ، وهذا المذهب على الرغم من وروده في صورة غير دقيقة في الملحق « ب » من هذا الكتاب ، فلم يبلغ بعد مرحلة التطور التي تبين أن وجود الفصول اللانهائية لا يمكن إثباته منطقيا . أما ما ذكرته عن نظريات الوجود في الفقرة الأخيرة من الباب الأخير من هذا الكتاب ، فلم يعد يظهر لي أنه صحيح : فثل هذه النظريات الوجودية فيما عدا بعض الاستثناءات ، هي كما أقول الآن أمثلة على القضايا التي يعبر عنها في حدود منطقية ، ولكنها لا يمكن أن تثبت أو تبطل إلا بدليل تجريبي .

ومثال آخر هو بديهية الضرب أو بديهية « زرمelo » Zermelo الخاصة بالانتخاب والتي تكافئها . وتقرر هذه البديهية أنه إذا علمت مجموعة من الفصول المتباعدة فيما بينها بحيث لا يكون أى واحد منها صفراً ، فهناك على الأقل فصل واحد يتكون من ممثل واحد من كل فصل من فصول المجموعة . ولست أدرى أيكون هذا صحيحاً أو لا . ومن السهل تخيل عوالم تكون فيها صحيحة ، ومن المستحيل إثبات وجود عوالم ممكنة تكون فيها باطلة . وكذلك من المستحيل (على الأقل هذا ما أعتقد) إثبات عدم وجود عوالم ممكنة تكون فيها باطلة . ولم أتبين ضرورة هذه البديهية إلا بعد نشر كتاب « الأصول » بعام . من أجل ذلك يشتمل هذا الكتاب على بعض الأخطاء ، مثال ذلك الحكم (في بند ١١٩) بأن تعريف اللانهاية متكافئان ، ولا يمكن إثبات ذلك إلا إذا سلمنا ببديهية الضرب .

(١) يريد المؤلف هذا الكتاب أى « أصول الرياضيات » .

وتبين مثل هذه الأمثلة - التي يمكن مضاعفتها إلى ما لا نهاية له - أن قضية ما قد تحقق التعريف الموجود في استهلال هذا الكتاب ، ومع ذلك تعجز عن الإثبات أو عدم الإثبات المنطقي أو الرياضي . وجميع القضايا الرياضية يشملها التعريف (مع بعض تعديلات يسيرة) ولكن ليست جميع القضايا الداخلة رياضية . فلكي تنتمي القضية للرياضة لا بد أن يكون لها خاصية أخرى كما يقول « وتنجشتين » ، يجب أن تكون « تكرارية » ، *tautological* ، وعند « كارناب » أنها « تحليلية » ، وليس من السهل بأى حال الحصول على تعريف دقيق لهذه الخاصية . وفضلا عن ذلك فقد يبين كارناب أنه لا بد من التمييز بين « تحليل » و « قابل للإثبات » ، باعتبار أن المعنى الأخير تصور أصيق نوعاً ما . الحق أن القضية أنكون تحليلية أم قابلة للإثبات ، فذلك يتوقف على جهاز المقدمات التي نبدأ منها ، فإلى أن يكون عندنا معيار نزن به المقدمات المنطقية المقبولة تصبح مسألة القضايا المنطقية موكولة إلى اختيارنا إلى حد كبير جدا ، وهذه نتيجة غير مرضية ، ولست أقبلها على أنها نهائية . ولكن قبل أن نقول شيئا أكثر من ذلك حول هذا الموضوع ، علينا أن نناقش مسألة « الثوابت المنطقية » التي تلعب دوراً جوهرياً في تعريف الرياضة ، كما جاء في استهلال هذا الكتاب .

وثة أسئلة ثلاثة بالنسبة للثوابت المنطقية : أولاً أتوجد مثل هذه الثوابت ؟ ثانياً ، كيف تعرف ؟ ثالثاً ، هل ترد في القضايا المنطقية ؟ والأول والثالث من هذه الأسئلة في غاية الإبهام ، ولكن قليلاً من المناقشة قد يحل معانيها المتعددة . أولاً : هل توجد ثوابت منطقية ؟ هناك ناحية واحدة من هذا السؤال يمكننا أن نجيب عنها بنحسب مثبت محدود تماماً : في التعبير اللغوي أو الرمزي للقضايا المنطقية توجد ألفاظ أو رموز تلعب دوراً ثابتاً ، أى لها نفس المساهمة في دلالة القضايا حيثما ترد . مثال ذلك « أو » « و » « لا » « بما أن - إذن » الفصل الصغرى ، « ١ » « ٢ » وتقع الصعوبة في أننا حين نحلل القضايا ذات الصيغة المكتوبة والتي ترد فيها مثل هذه الرموز ، فلن نجد لها أجزاء تناظر

التعبيرات المذكورة . وفي بعض الحالات يكون هذا واضحاً تماماً : فلن يزعم أشد الأفلاطونيين حماسة أن « أو » الكاملة موجودة في السماء ، وأن « الاوات » الموجودة في هذه الأرض محاكاة ناقصة لذلك النموذج السماوي . أما في حالة الأعداد فالأمر أقل وضوحاً ، ذلك أن مذاهب فيثاغورس التي بدأت بصوفية رياضية أثرت في كل فلسفة ورياضة جاءت فيما بعد تأثيراً أعمق مما يظن عادة . فالأعداد كانت أزلية ولا تتبدل كالأجرام السماوية ؛ وكانت الأعداد مقولة ، وكان علم العدد مفتاح الكون . وقد ضلل الاعتقاد الأخير الرياضيين ومجلس التربية والتعليم منذ القديم حتى اليوم . وترتب على ذلك أن القول بأن الأعداد رموز لا تعنى شيئاً ، ظهر وكأنه صورة فظيعة من الإلحاد . وفي الوقت الذي كتبت فيه هذا الكتاب كنت أشارك « فريج » الاعتقاد في الحقيقة الأفلاطونية للأعداد ، التي كنت أنتصروها في خيالي تسكن عالم الوجود الأبدي . وكان ذلك الإيمان مريحاً ، ولكنني هجرته فيما بعد مع الأسف . ولا بد الآن من ذكر شيء عن الخطوات التي أفضت بي إلى هجره .

في الباب الرابع من هذا الكتاب قلت : « كل لفظة ترد في جملة يجب أن يكون لها معنى ما » وقلت أيضاً : « وكل ما يمكن أن يكون موضوعاً للفكر ، أو ما يمكن أن يرد في قضية صادقة أو كاذبة ، أو يمكن أن يعد واحداً ، سأسميه حدا فالألفاظ : رجل ، لحظة ، عدد ، فصل ، علاقة ، القول ، أو أي شيء آخر يمكن ذكره ، هي بكل تأكيد حد . وإنكار أن شيئاً ما هو حد يجب أن يكون باطلاً دائماً » . وقد تبين لي أن هذه الطريقة لفهم اللغة خاطئة . فأن نقول إن « اللفظة يجب أن يكون لها معنى ما » — فاللفظة بالطبع ليست متممة ، بل شيئاً له استعمال معقول — ليس صحيحاً دائماً ، إذا أخذت العبارة على أن اللفظة تقوم على انفراد منعزلة . والصحيح هو أن اللفظة تساهم في معنى الجملة التي ترد فيها ، ولكن هذا أمر مختلف عما سبق ذكره .

وكانت أول خطوة في هذه العملية نظرية الأوصاف . وطبقاً لهذه النظرية

نجد أن في القضية « سكوت هو مؤلف ويشرلى »^(١) ، لا يوجد جزء يناظر « مؤلف ويشرلى » : وتحليل القضية بوجه التقريب هو : « كتب سكوت ويشرلى ، وكل من كتب ويشرلى كان سكوت » أو بوجه أكثر دقة : « دالة القضية س كتب ويشرلى تكافئ س هو سكوت ، صادقة لجميع قيم س . وقد ألغت هذه النظرية الزعم — الذى نادى به مثلاً « ميتونج » — بأنه لا بد من وجود فى علم الوجود أشياء من مثل الجبل الذهبى والمربع المستدير ، ما دمتا نستطيع الكلام عنها ، ولقد كانت القضية « المربع المستدير ليس له وجود » من القضايا الصعبة دائماً ، إذ كان من الطبع السؤال : « ما هذا الشيء الذى ليس له وجود ؟ » وأى جواب ممكن كان يظهر أنه يستلزم من بعض الوجوه وجود شيء كالمربع المستدير ، ولو أن هذا الشيء له الخاصية الغريبة وهى عدم الوجود . وقد تجنبت نظرية الأوصاف هذه الصعوبة وغيرها من الصعوبات .

ثم كانت الخطوة التالية لإلغاء الفصول ، وهى خطوة اتخذت فى كتاب « مبادئ الرياضيات Principia Mathematica » حيث جاء : « إن الرموز عن الفصول كتلك الرموز الخاصة بالأصناف هى فى نظامنا رموز ناقصة ، فاستخداماتها معروفة ، ولكن من المسلم به أنها فى ذاتها لا تعنى شيئاً ألبتة وعلى ذلك فالفصول بالحد الذى نستخدمها فيه إنما هى استعمالات رمزية أو لغوية مريحة لا أشياء حقيقية » (المجلد الأول ص ٧١ — ٧٢) . فلما رأينا الأعداد الصحيحة قد عرفت بأنها فصول فصول ، فقد أصبحت هى أيضاً : « مجرد استعمالات رمزية أو لغوية مريحة » . وهكذا مثلاً القضية : « $١ + ١ = ٢$ » مع شيء من التبسيط تصبح كما يأتى : « ضع دالة القضية « ليست ب ، و س هى ح مهما تكن قيمة س ، تكافئ دائماً س هى ا أو س هى ب » وضع أيضاً دالة القضية « ا هى ح ، ومهما تكن قيمة س ، س هى ح ولكنها ليست ا ، تكافئ دائماً س هى ب » . فهما تكن قيمة ح فإن الحكم

(١) سير والتر سكوت (١٧٧١-١٨٢٢) شاعر وقصصى اسكتلندى ، ومن رواياته ويشرلى Waverley ألفها سنة ١٨١٤ (المترجم) .

بأن إحدى هاتين الدالتين ليست كاذبة دائماً (لقيم مختلفة ١١ ، ب) يكافئ الحكم بأن الدالة الأخرى ليست كاذبة دائماً . هنا نجد أن العددين ١ ، ٢ قد اختبيا تماماً ، ويمكن تطبيق تحليل مماثل على أى قضية حسابية .

وقد أغرقني الدكتور هوبسيد ، في هذه المرحلة ، بهجر نقط المكان ، ولحظات الزمان ، وجسيات المادة ، واضعاً بدلاً منها تركيبات منطقية مؤلفة من الأحداث « Events » وأخيراً ظهر أنه ترتب على ذلك أنه لا شيء من المادة الخام في العالم لها خواص منطقية سهلة بل كل ما يظهر أن له مثل هذه الخواص فهو مركب تركيباً صناعياً كى تكون له هذه الخواص ، لست أعنى أن تقريراتنا الواضحة عن النقط أو اللحظات أو الأعداد ، أو أى شيء آخر نحذفه حين نجزئه كما فعل « أوكام » Occam باطلة ، كل ما في الأمر أنها تحتاج إلى تأويل يبين أن صورتها اللغوية مضللة ، وأنها حين تحلل تحليلاً صحيحاً نجد أن الأشياء الزائفة السابقة لا ذكر لها فيها . خذ مثلاً هذه القضية « يتألف الزمان من لحظات » قد تكون عبارة صحيحة وقد لا تكون ، ولكنها على أى الحالين لا تذكر الزمان أو اللحظات . وقد يمكن على وجه التقريب تأويلها كما يأتي : لتكن أى حادثة هي س ، ولنعرف « كمعاصراتها » تلك التى تنتهى بعد أن تبدأ الحادثة ، ولكنها تبدأ قبل أن تنتهى الحادثة ؛ ولنعرف من الحوادث المعاصرة « المعاصرات الابتدائية » لـ س تلك التى ليست متأخرة كلية عن أى معاصرات أخرى لـ س . عندئذ تكون العبارة « يتألف الزمان من لحظات » صحيحة إذا علمت أى حادثة س ، فكانت كل حادثة متأخرة كلية عن معاصرة ما س متأخرة كلية من معاصرة ابتدائية ما لـ س . ولا بد من عملية ماثلة من التأويل بالنسبة لمعظم ، إن لم يكن لجميع الثوابت المنطقية البحتة .

وهكذا فإن السؤال عن الثوابت المنطقية هل ترد في قضايا المنطق يصبح سؤالاً أكثر صعوبة مما كان يبدو لأول وهلة . وهو سؤال في الواقع وبالنظر إلى الأشياء كما هي عليه لا يمكن الإجابة عنه جواباً محدداً ، إذ لا يوجد تعريف مضبوط لقولنا « يرد » في القضية . ومع ذلك فيمكن أن نقول في هذه المسألة

بعض القول ، فأولا لا توجد أى قضية منطقية يمكن أن تذكر شيئا خاصا .
فهذه العبارة : « إذا كان سقراط إنسانا ، وكان جميع الناس فانيين ، إذن
سقراط فان » ليست قضية منطقية . والقضية المنطقية التى تكون العبارة السابقة
حالة خاصة منها هى : « إذا كانت س لها خاصية ϕ ، وكل ما له خاصية ϕ
فله الخاصية ψ ، إذن س له الخاصية ψ ، مهما تكن س ، ϕ ، ψ . » واللفظة
« خاصة » property التى ترد هنا ، تختفى من التعبير الرمزى الصحيح
للقضية ، ولكن « إذا - إذن » ، أو ما يقوم مقامها ، تبقى . وبعد بذل أقصى
مجهود لاختزال عدد العناصر اللامعروفة فى الحساب التحليل المنطقى ، سنجد
أنفسنا بإزاء عنصرين (على الأقل) يظهر أنه لا غنى عنهما : الأول هو عدم
الاتفاق ، والثانى هو الصدق لجميع قيم دالة القضية (وتقصد بعلم اتفاق
قضيتين أنهما لا يصدقان معاً)^(١) . ولا واحد من هذين العنصرين يظهر أنه
ضرورى جدا . وما سبق أن ذكرناه عن « أو » ينطبق كذلك على عدم الاتفاق ،
وقد يبدو من التناقض القول بأن العموم جزء من مكونات قضية عامة .

فالثوابت المنطقية ، إذا كان لنا أن نتمكن من ذكر شيء محدد عنها ،
فلا بد من دراستها على أنها جزء من اللغة لا على أنها جزء مما تتبنا عنه اللغة .
وبهذه الطريقة يصبح المنطق لغوياً أكثر مما كنت أعتقد عند ما كتبت هذا
الكتاب ، وسيظل الأمر صحيحاً من أنه لا يرد من الثوابت فى التعبير اللفظي
أو الرمزى للقضايا المنطقية سوى الثوابت المنطقية . ولكن ليس صحيحاً أن هذه
الثوابت المنطقية هى أسماء أشياء كما هو المقصود من « سقراط » أن يكون .

وبناء على ذلك ليس تعريف المنطق أو الرياضيات سهلاً بآية حال إلا بالإضافة
إلى مجموعة من المقدمات المعطاة . ولا بد أن يكون للمقدمة المنطقية خصائص
معينة يمكن تعريفها . ولا بد أن يكون لها عموم كامل بمعنى أنها لا تذكر أى
شيء خاص أو صفة خاصة . ولا بد أن تكون صادقة بحكم صورتها . فإذا

(١) طبقاً لتعريف المؤلف يمكن ترجمة علم الاتفاق incompatibility بما جاء فى
المنطق القديم أى التضاد . (المترجم)

أعطينا مجموعة معينة من المقدمات المنطقية أمكننا تعريف المنطق بالنسبة لهذه المقدمات بمقدار ما تمكنا من البرهان ، ولكن (١) من الصير القول ما الذى يجعل القضية صادقة بحكم صورتها . (٢) من الصعب أن نبين أى طريق لإثبات أن النظام الناتج من مجموعة معطاة من المقدمات نظام كامل ، بمعنى أنه يحيط بكل شئ نرغب أن يشمل في القضايا المنطقية . وفيما يختص بهذه النقطة الثانية قد جرت العادة على قبول المنطق والرياضة الجاريتين على أنهما من المعطيات ، ثم على البحث عن أقل المقدمات التى يمكن إعادة تركيب هذه الموضوعات منها ، ولكن حين تنشأ شكوك — كما قد نشأت — خاصة بصحة بعض أجزاء الرياضيات ، تركنا هذه الطريقة في الظلام .

ويبدو من الواضح أنه لا بد من وجود طريقة مّا لتعريف المنطق بغير علاقته بلغة منطقية خاصة . ومن الظاهر أن خاصية المنطق الأساسية هي تلك التى نشير إليها بقولنا : إن القضايا المنطقية صادقة بحكم صورتها . أما مسألة قابلية الإثبات فلا يمكن أن تدخل في هذه الخاصية ما دامت كل قضية تستتج من المقدمات في ظل نظام ، قد تؤخذ هي ذاتها كقائمة في ظل نظام آخر . وإذا تعقدت القضية فلن يكون هذا مناسباً ، ولكنه لا يمكن أن يكون مستحيلاً ، إن جميع القضايا القابلة للإثبات في أى نظام منطقي مقبول يجب أن تشارك مع المقدمات خاصة كونها صادقة بحكم صورتها . وجميع القضايا الصادقة بحكم صورتها ينبغي أن يشملها أى منطق كامل . وثمة بعض الكتاب مثل « كارناب » في كتابه « الإعراب المنطقي للغة » يعالج المشكلة كلها على أنها مسألة اختيار لغوى أكثر مما يمكننى أن أعتقده أن يكون . فكارناب في كتابه المذكور يستخدم لغتين منطقتين ، إحداهما تسمح ببديهية الضرب وبديهية الانهائية ، والأخرى لا تسمح بذلك . أستطيع شخصياً اعتبار مثل هذا الأمر على أنه راجع إلى اختيارنا التعسفى . ويبدو لى أن هذه البديهيات إما أن فيها خاصية الصديق الصورى الذى يميز المنطق أو ليس فيها ذلك ، وفي الحالة الأولى يجب أن يشتمل كل منطق على هذه البديهيات ، وفي الحالة الثانية

يجب أن يستبعدا . ومع ذلك فأنا أعترف أنني عاجز عن إعطاء أى بيان واضح بالمقصود من قولم إن القضية « صادقة بحكم صورتها » . غير أن هذه العبارة على نقصها تشير فيها أعتقد إلى المشكلة التي يجب أن تحل إذا كان لا بد من إيجاد تعريف كامل للمنطق .

وأنقل أخيراً إلى السؤال عن المتناقضات ومذهب الأصناف types . أما هنرى بوانكاريه الذى لم يعتبر المنطق الرياضى مُعِيناً في الكشف ومن ثم فهو عقيم ، فقد ابتجع بالمتناقضات وقال : « لم يعد المنطق الرياضى عقياً ، ذلك أنه يُوكَّد التناقض ! » . ومع ذلك فكل ما فعله المنطق الرياضى هو أن يبين بوضوح أن المتناقضات تلزم عن مقدمات سبق التسليم بها من جميع المناطق ، وإن تكن الرياضة بريئة منها . ولم تكن جميع المتناقضات جديدة ، إذ أن بعضها يرجع إلى زمان الإغريق .

ولم أذكر في هذا الكتاب سوى ثلاث متناقضات : متناقضة بورالى فورتى Burali Forti الخاصة بأكبر عدد ترتيبى ، والمتناقضة الخاصة بأكبر عدد أصلى ، ومتناقضتى الخاصة بالفصول التي ليست حدوداً لذاتها (ص ٣٢٣ ، ٣٦٦ ، ١٠١ من الطبقة الإنجليزية) . ويمكن تجاهل ما قيل عن الحلول الممكنة ، ما عدا الملحق ب الخاص بنظرية الأصناف ، وهذه ذاتها ليست إلا تخطيطاً أولياً . وقد كتبت عن المتناقضات الشيء الكثير ، ومع ذلك لا يزال الموضوع محل بحث وخلاف . وأكمل دراسة أعلمها عن هذا الموضوع توجد في كتاب كارتاناب : الإعراب المنطقى للغة "Logical Syntax of Language" (طبعة Kegan Paul ١٩٣٧) . وما يقوله عن الموضوع يبدو لي إما صحيحاً وإما بالغ الصعوبة إلى درجة يصعب معها رفضه ، ويصعب الرد عليه في صفحات قليلة . ولذلك سأقتصر على ذكر بعض ملاحظات عامة .

ويبدو لأول وهلة أن أنواع المتناقضات ثلاثة : الرياضية ، والمنطقية ، وتلك التي قد يشك في أنها ترجع إلى حيل لغوية قد تكون بسيطة أو معقدة . ويمكن اتخاذ المتناقضات الخاصة بأكبر الأعداد الترتيبية وأكبر الأعداد

الأصلية نماذج على المتناقضات الرياضية المؤكدة .

وأول هذه المتناقضات ، وهى التى ذكرها بورالى فورى ، هى كما يأتى :
فلترتب جميع الأعداد الترتيبية بحسب مقاديرها ، فيكون آخرها الذى سنسميه
هـ هو أكبر الأعداد الترتيبية . ولكن عدد جميع الأعداد الترتيبية من ٠ إلى هـ
هو هـ + ١ ، وهذا أكبر من هـ . ولا مهرب لنا من هذا الأمر باقتراح أن سلسلة
الأعداد الترتيبية ليس لها حد أخير ، إذ فى تلك الحالة كذلك يكون لهذه
السلسلة ذاتها عدد ترتيبي أكبر من أى حد فى السلسلة ، أى أكبر من أى
عدد ترتيبي .

والمتناقضة الثانية الخاصة بأكبر عدد أصلى لها الفضل بوجه خاص فى
الكشف عن الحاجة إلى مذهب للأصناف . ونحن نعلم من الحساب الأول
أن عدد توافقات هـ من الأشياء مأخوذاً منها أى عدد فى وقت واحد هو ٢ هـ ،
أى أن فصل هـ من الحدود له ٢ هـ من الفصول الفرعية . ونستطيع إثبات أن
هذه القضية تبقى صحيحة حين تكون هـ لا متناهية . وقد أثبت «كانتور» أن ٢ هـ
أكبر دائماً من هـ . ويرتب على ذلك أنه لا يمكن وجود عدد أصلى هو أكبر
الأعداد الأصلية . ومع ذلك فقد كنا نستطيع افتراض أن الفصل المشترك
على كل شئ فقيه أكبر عدد ممكن من الحدود . وما دام عدد فصول الأشياء
يفوق عدد الأشياء ، فمن الواضح أن فصول الأشياء ليست أشياء (وسأوضح
بعد قليل ماذا تعنى هذه العبارة) .

ومن المتناقضات المنطقية الواضحة تلك التى ناقشناها فى الباب العاشر ؛
وفى المجموعة اللغوية أشهر المتناقضات هى المعروفة باسم «الكاذب» ، والتى
وضعها الإغريق . وهى تجرى على النحو الآتى : لنفرض أن شخصاً يقول :
«إنى أكذب» ، فإذا كان يكذب ، فإنخاره صادق ، فهو إذن لا يكذب ؛
وإذا لم يكن يكذب ، فهو حين يقول إننى أكذب ، فهو يكذب . وهكذا فإن
كلا من الفرضين يلزم عنه تناقض .

والمتناقضات المنطقية والرياضية كما قد نتوقع ليست قابلة للتمييز فى الحقيقة .

أما المجموعة اللغوية تبعاً لتفسير رمزي « Ramsey » ، فيمكن حلها بما قد نسميه بمعنى واسع الاعتبارات اللغوية . وهذه تتميز عن المجموعة المنطقية بأنها تدخل أفكاراً تجريبية كذلك التي يحكم بها أو يقصدها زيد من الناس . وما دامت هذه الأفكار ليست منطقية ، فمن الممكن التماس حلول تعتمد على شيء آخر خلاف الاعتبارات المنطقية . وهذا ييسر تبسيط نظرية الأصناف إلى حد كبير ، وهي نظرية كما تظهر طبقاً لمناقشة رمزي تقف عن أن تكون غير مقبولة أو صناعية أو مجرد فرض وضع لتجنب التناقض .

والجوهر الفنى لنظرية الأصناف لا يعدو أن يكون على هذا النحو : لنكن دالة قضية « ϕ » بحيث تكون جميع قيمها صادقة ، فهناك تعبيرات ليس لنا فيها الحق في استبدال « s » . خذ مثلاً : جميع قيم « إذا كان s إنساناً s فان » صادقة ، واستنتجنا منها « إذا كان سقراط إنساناً ، إذن سقراط فان » ، ولكننا لا نستطيع أن نستنتج « إذا كان قانون عدم التناقض إنساناً ، إذن قانون عدم التناقض فان » فنظرية الأصناف تعلن أن هذا الترتيب الأخير للألفاظ لا معنى له ، وتعطى قواعد للقيم المسموح بها لـ « s » في « ϕ » . أما في التفاصيل فثمة صعوبات وتعقيدات ولكن المبدأ العام إنما هو صورة أدق لما اعترف به دائماً . ففي المنطق الأقدم المتعارف عليه جرت العادة على القول بأن مثل هذه الصورة من الألفاظ « التفضيلة مثلثة » لا هي صادقة ولا كاذبة ، ولكن لم تبذل أية محاولة لبلوغ مجموعة من القواعد المحدودة للحكم بأن السلسلة المعطاة من الألفاظ أمي معبرة أم لا . وهذا ما حققته نظرية الأصناف . فثلاً لقد قررت من قبل أن : « فصول الأشياء ليست أشياء » وهذا يعنى : « إذا كانت s حداً في الفصل ١ ، قضية ، وكانت « ϕ » قضية ، فإن s ليست قضية ، بل مجموعة لا معنى لها من الرموز » .

ولا تزال هناك مسائل خلافية في المنطق الرياضى لم أحاول في الصفحات السابقة حلها ، وإنما ذكرت فقط تلك الأمور التي كان لها في نظرى بعض

التقدم المعين منذ أن كتبت هذا الكتاب . ويوجه عام لا أزال أعتقد أن هذا الكتاب على صواب حيث يختلف مع ما سبق التسليم به ، أما حيث يتفق مع نظريات أقدم فهو عرضة للخطأ . ويبدو لي أن التغيرات المطلوبة في الفلسفة ترجع في شطر منها إلى التقدم التقني للمنطق الرياضي خلال الأعوام الأربعة والثلاثين الأخيرة^(١) ، والتي بسطت جهاز الأفكار والقضايا الأصلية ، واكتسحت كثيراً من المسميات الظاهرة ، مثل الفصول ، والنقط ، والاحظاظ . صفوة القول ، النتيجة هي نظرة عامة أقل أفلاطونية أو أقل حقيقية على المعنى المدرسي لهذا الاصطلاح . أما إلى أي حد من الممكن الذهاب في طريق اللفظية فيبقى في نظري مسألة بغير حل ، ولكنها سواء أقبلت الحل حلاً كاملاً أم لا فإنما يمكن البحث فيها بحثاً مستوفى عن طريق المنطق الرياضي .

(١) يشير المؤلف إلى أنه أصدر الطبعة الأولى سنة ١٩٠٣ ، والطبعة الثانية إلى كتب فيها هذه المقدمة سنة ١٩٣٧ (المترجم)

تمهيد

يحقق هذا الكتاب غرضين : الأول هو الدليل على أن جميع الرياضيات البحتة تنفرد بالبحث في التصورات التي يمكن تعريفها بعبارات تشتمل على عدد قليل جداً من التصورات المنطقية الأساسية ، وأن جميع قضايها يمكن استخلاصها من عدد قليل جداً من المبادئ المنطقية الأساسية — فهذا هو الذي اضطلعنا به في الأجزاء من الثاني إلى السابع من هذا المجلد ، وسوف نقيم الحجة على ذلك بالاستدلال الرمزي الدقيق في المجلد الثاني . وستجد في البرهان على هذه الدعوى — إذا لم أكن مخطئاً — جميع ما تقدر عليه البراهين الرياضية من يقين وإحكام . ولما كانت هذه الدعوى حديثة جداً بين جمهرة الرياضيين ، ويكاد ينكرها الفلاسفة بالإجماع ، فقد أخذت على عاتقي في هذا المجلد أن أدافع عن مختلف أجزائها كلما جاءت مناسبة ، ضد النظريات المخالفة مما كان يبدو أنها مسلم بها على نطاق واسع ، أو عسيرة على القول بخلافها . وحاولت كذلك أن أقدم في لغة بعيدة عن الاصطلاحات الفنية ما أمكن أهم المراحل في الاستنتاجات التي أثبت فيها هذه الدعوى .

أما الغرض الثاني من هذا الكتاب والذي يشغل الجزء الأول ، فهو تفسير التصورات الأساسية التي تسلم بها الرياضيات على أنها لا تقبل التعريف . وهذا عمل فلسفي بحت ، ولا أستطيع أن أثني على نفسي بأكثر من أنني فتحت باب ميدان واسع للبحث ، وقدمت نموذجاً من الطرق التي يمكن أن نسلکہا في هذا البحث . إن مناقشة اللامعرفات — وهو ما يشغل أهم جانب من المنطق الفلسفي — محاولة لكي نرى بوضوح ، ولكي نجعل غيرنا يرى كذلك بوضوح ، الأشياء « entities » التي نبهنا ، لعل العقل يظفر بذلك الضرب من الألفه بها كما يألف الحجرة أو طعم الأناناس . وحيث نحصل على اللامعرفات ، كما هو الأمر في حالتنا الحاضرة ، باعتبار أنها آخر بقية ضرورية في عملية التحليل ،

فالعالم من الأسهل معرفة أنه لا بد من وجود مثل هذه الأشياء من أن نذكرها بالفعل . فهنا عملية تشبه تلك التي أدت إلى الكشف عن نبتيون ، مع هذا الفارق وهو أن المرحلة الأخيرة — أى البحث بمنظار عقلى عن ذلك الأمر الذى استخلصناه — هى فى الغالب أصعب جانب فى المهمة . ففى حالة الفصول لا بد لى من الاعتراف بأننى فشلت فى إدراك أى تصور يحقق الشروط المطلوبة لفكرة الفصل ، وثبتت التناقض الذى ناقشته فى الباب العاشر أن ثمة خطأ ما غير أننى عجزت حتى الآن عن كشفه .

أما المجلد الثانى الذى أسعدنى فيه الحظ بمعاونة الأستاذ هوايتيد ، فسيكون موجهاً على الإطلاق للرياضيين . سيشتمل على سلاسل من الاستنباطات من مقدمات من المنطق الرمضى ، مارا بالحساب المتناهى واللامتناهى ، إلى الهندسة فى ترتيب شبيه بما اصططنه فى هذا المجلد ، وسيشتمل كذلك على آراء متعددة مبتكرة أثبت معها طريقة الأستاذ « بيانو » ، مكملة بمنطق العلاقات ، أنها آلة قوية فى البحث الرياضى .

وهذا المجلد الذى يمكن اعتباره إما تعليقاً على المجلد الثانى أو مقدمة له قد قصدت به وجهة الفيلسوف والرياضى على حد سواء ، غير أن بعض أجزائه يهتم الفيلسوف أكثر مما يهتم الرياضى ، وبعضها الآخر يهتم الرياضى أكثر مما يهتم الفيلسوف . وأود أن أنصح الرياضيين أن يبدعوا بقراءة الجزء الرابع اللهم إلا إذا كانوا ممن يهتمون بوجه خاص بالمنطق الرمضى ، ولا يرجعون إلى الأجزاء الأولى إلا إذا اقتضت المناسبة . وفيما يلى الأبواب التى يغلب عليها خاصة طابع الفلسفة : الجزء الأول (مع حذف الباب الثانى) . الجزء الثانى ، الأبواب ١١ ، ١٥ ، ١٦ ، ١٧ ؛ الجزء الثالث ؛ الجزء الرابع بند ٢٠٧ ، والأبواب ٢٦ ، ٢٧ ، ٣١ ؛ الجزء الخامس ، الأبواب ٤١ ، ٤٢ ، ٤٣ ؛ الجزء السادس الأبواب ٥٠ ، ٥١ ، ٥٢ ؛ الجزء السابع ، الأبواب ٥٣ ، ٥٤ ، ٥٥ ، ٥٦ ، ٥٧ ، ٥٨ . ثم الملحقان الخاصان بالجزء الأول وينبغى قراءتهما معه . أما كتاب الأستاذ « فريج » والذى يسبق فيه إلى حد كبير آرائى ، فقد كنت أجهل

معظمه حين بدأت طبع هذا الكتاب ، حقا قد اطلعت على كتابه في الحساب المسمى « قوانين الحساب الأساسية » Grundgesetze der Arithmetik ، ولكن نظراً لصعوبة رمزيته الشديدة ، فقد عجزت عن إدراك أهميته أو فهم محتوياته . ورأيت أن الطريقة الوحيدة لإنصاف كتابه بعد أن تأخر في الوقت هو أن أعرضه في ملحق خاص ؛ وسيجد القارئ أن بعض التقطع التي وردت في الملحق تختلف عن تلك التي جاءت في الباب السادس ، وبخاصة البنود ٧١ ، ٧٣ ، ٧٤ . وقد اكتشفت عن المسائل المناقشة في هذه الفقرات أخطاء بعد إرسال الأصول إلى المطبعة ، وقد عدلت في الملاحق هذه الأخطاء وأهمها إنكار وجود الفصل الصفري ، والمطابقة بين الحد وبين الفصل الذي هو حده الوحيد . وعلى الجملة فإن الموضوعات التي عالجتها من الصعوبة بحيث أشعر بثقة قليلة في آرائى الحاضرة ، وأعتبر أن نتائجها قد دافعت عنها على أنها أساساً فروض . ولعل بعض الكلمات القليلة عن أصل هذا الكتاب قد تبين أهمية المسائل المناقشة فيه . فنذ ست سنوات مضت بدأت بحثاً عن فلسفة الديناميكا ، فقابلتني هذه الصعوبة وهي أنه حين يتعرض جسم لقوى متعددة ، فلا واحدة من العجلات المكونة تحصل بالفعل ، وإنما فقط العجلة المحصلة والتي لم تكن تلك العجلات أجزاء فيها . وقد نفي هذا الواقع الوهم بتعليل حصول الجزئيات بالجزئيات كما يشته لأول وهلة قانون الجاذبية . وظهر كذلك أن الصعوبة بالحركة المطلقة لا تقبل الحل على أساس نظرية المكان العلاقية . وانتهى بي الأمر بعد النظر في هذين السؤالين إلى إعادة فحص مبادئ الهندسة ، ثم إلى فلسفة الاتصال واللانهاية ، ثم إلى المنطق الرمزي ناظراً إلى الكشف عن معنى لفظة «أى» . وأكبر الظن أن ما حصلت عليه في النهاية خاصا بفلسفة الديناميكا كان ضئيلاً وعلة ذلك أن معظم مسائل الديناميكا يظهر لي أنها تجريبية ، وهي لذلك تخرج عن نطاق مثل هذا الكتاب الذي فقلمه ، فكان لا بد من حذف كثير من الأسئلة المهمة جداً ، وخاصة في الجزئين السادس والسابع ، والتي لعلها كان من الأفضل أن تشرح في هذه المرحلة لولا خشية سوء الفهم .

وحين نعد الأشياء الفعلية ، أو حين نطبق الهندسة والديناميكا على المكان الفعلي أو المادة الفعلية ، أو حين يطبق الاستدلال الرياضى بأى طريقة أخرى على ما هو موجود ، فإن للاستدلال الذى نستخدمه صورة لا تتوقف على الأشياء التى يطبق عليها من جهة ما هى عليه ، بل من جهة أن لها خواص علمية معينة. وفى الرياضة البحتة لن نضع أبداً الأشياء الموجودة بالفعل فى عالم الوجود موضع البحث ، وإنما فقط الأشياء الفرضية التى لها تلك الخواص العامة التى يتوقف عليها أى استنباط ننظر فيه . وسنعتبر دائماً عن هذه الخواص العامة بعبارات من التصورات الأساسية التى أطلقت عليها اسم الثوابت المنطقية . وهكذا فنحن حين نتكلم عن المكان أو الحركة فى الرياضة البحتة ، فليس ما نتكلم عنه هو المكان الفعلي أو الحركة الفعلية كما نعرفهما فى التجربة ، بل شيئاً له تلك الخواص العامة المجردة للمكان أو الحركة مما يستخدم فى الاستدلال المتعلق بالهندسة أو الميكانيكا . ولا محل للسؤال فى الرياضة البحتة عن هذه الخواص أتمتعلق فى الواقع بالمكان الفعلي والحركة الفعلية أم لا ، ولذلك فلا محل فى هذا الكتاب لهذا السؤال ، من جهة أنه فى نظرى تجريبى محض ، يبحث عنه فى المعمل أو المرصد . حقا للمناقشات المتصلة بالرياضة البحتة أثر عظيم غير مباشر على مثل تلك الأسئلة التجريبية ، ما دام كثير من الفلاسفة إن لم يكن معظمهم يذهبون إلى أن القول بالمكان والحركة الرياضيين خُلُفٌ ، وهما لذلك مختلفان بالضرورة عن المكان الفعلي والحركة الفعلية ، على حين أنه إذا صححت الآراء المعروضة فى الصفحات التالية فلن يكون ثمة خلفٌ فى المكان والحركة الرياضيين . ولكن تكاد معظم هذه الاعتبارات الخارجة عن الرياضة أن تكون قد استبعدت كلية من هذا الكتاب .

أما موافى من المسائل الأساسية الفلسفية فى جميع صورها الهامة فهو مستمد من الأستاذ ج . ا . مور Moore ، فقد أخذت عنه الطبيعة غير الوجودية للقضايا (ما عدا تلك التى تحكم الوجود) ، واستقلالها عن أى ذهن عارف ؛ وكذلك مذهب الكثرة الذى يعتبر العالم سواء عالم الموجودات أم المجرّدات

entities ، ^(١) على أنه مركب من عدد لانهاى من أشياء أو موجودات كل منها له استقلاله ، ويقوم على علاقات مطلقة لا تقبل الرد إلى صفات حدودها أو صفات المجموع الذى يتركب من هذه الحدود . ولقد كنت عاجزاً العجز كله قبل أن أتعلم منه هذه الآراء عن بناء أى فلسفة للحساب ، حتى إذا سلمت بها تحررت على الفور من كثير من الصعوبات التى أظنها عسيرة الحل بغيرها . وفى اعتقادى أن النظريات المذكورة فى السطور السابقة لا غنى عنها لأى فلسفة رياضية مقبولة معتدلة ، وأرجو أن تبين صفحات الكتاب صحة ذلك . ولكنى أترك للقراء الحكم بمدى استخدام الاستدلال لهذه النظريات ، وإلى أى حد يؤيدها . ومقدمائى من الناحية الصورية إنما هى مسلمات ، ولكن الواقع من أنها تبيح للرياضة أن تكون صحيحة ، وهو مالا تفعله معظم الفلسفات ، فهذا ولا شك حجة قوية فى جانبها .

وانئى للمدين فى الرياضة كما هو واضح إلى «جورج كانتور» ، و« بيانو » ولو كان قد تيسر لى الاطلاع على مؤلف الأستاذ « فريج » من قبل لأخذت عنه الشيء الكثير ، ولكن الذى حصل هو أننى اهتمت مستقلاً عنه إلى كثير من النتائج التى كان قد أثبتها . وقد عاونى الأستاذ « هويتيد » فى كل مرحلة من مراحل الكتاب معونة ، تضيق العبارة عن وفاء حقها ، بالاقتراح والنقد والتشجيع الصادق ، علاوة على تفضله بقراءة تجارب الكتاب وتعديل عبارات كثيرة فيه . كما أدين للأستاذ « جونسون » بتوجيهات مفيدة . أما الأجزاء الفلسفية من الكتاب فالفصل الكثير فيها يرجع إلى الأستاذ « مور » إلى جانب موافى العام الذى يقوم مجموع الكتاب على أساسه .

ولقد كان من المستحيل فى محاولة الإحاطة بمثل هذا المجال الواسع تحصيل جميع ما كتب عن هذا الموضوع ، إذ توجد ولا ريب مباحث كثيرة هامة

(١) لفظة entity من الألفاظ العسيرة جداً على الترجمة ، ومن الصعب إيجاد مقابل لها فى العربية ، وقد قلنا سابقاً إنها « الأمر » ، ويمكن أن تطلق على الشيء ، أو الموجود بحسب السياق . ومنصطلق على ترجمتها بالشيء والأشياء فيما بعد . (المترجم)

لم أطلع عليها . ولكن حيث لا بد أن يستفد جهد التفكير والكتابة هذا الوقت الكثير فيبدو أن مثل ذلك الجهل ، مهما يكن شيئاً يؤسف له ، فلا يمكن تضاديه على الإطلاق .

وسيجد القارئ خلال المناقشة كثيراً من الألفاظ قد عرفت بمعان من الظاهر افتراقها الواسع عن الاستعمال الشائع . وأود أن يعتقد القارئ أن مثل هذا الافتراق لم يكن مجازفة ، ولكنني أقدمت عليه في تباطؤ شديد ، استوحته الأمور الفلسفية لسيين رئيسين : الأول أنه كثيراً ما يحصل أن نعتبر فكرتين متصلتين معاً ، ونجد أن اللغة تستعمل اسمين لإحدهما ولا تستعمل للأخرى أى اسم ، فيكون عندئذ من المناسب جداً التمييز بين الاسمين المستعملين عادة كترادفين ، بأن نحفظ بأحدهما للفكرة الجارية ، والآخر للمعنى الذى ليس له حتى ذلك الوقت اسم . والسبب الثانى ينشأ من الاختلاف الفلسفى مع وجهات النظر المتسلمة . فحيث تكون صفتان من المفروض عادة أنهما مرتبطتان ارتباطاً لا انفصال فيه ، ولكننا نعتبرهما هنا منفصلتين ، فالاسم الذى كان يطلق على المركب منهما لا بد أن يقصر إما على أحدهما أو الآخر . مثال ذلك أن القضايا تعتبر عادة إما (١) صادقة أو كاذبة (٢) ذهنية . فإذا ذهبنا كما أفعل إلى أن ما هو صادق أو كاذب ليس بوجه عام ذهني ، فإننا فى حاجة إلى اسم للصادق أو الكاذب من حيث هو كذلك ، ولا يمكن أن يكون هذا الاسم شيئاً آخر سوى القضية . وفى مثل هذه الحالة لا يكون الافتراق عن الاستعمال تعسفياً بأي حال . أما فيما يخص بالحدود الرياضية ، فقد أدت الضرورة لإثبات النظرية الوجودية فى كل حالة — أى الدليل على وجود أشياء من هذا القبيل — إلى كثير من التعاريف التى تبدو شديدة الاختلاف عن المعانى المرتبطة عادة بالحدود المذكورة . والمثال على ذلك هو تعاريف الأعداد الأصلية ، والترتيبية ، والمركبة . فى حالة النوعين الأولين ، وفى حالات أخرى كثيرة ، يؤثر أساساً التعريف على أنه فصل مستمد من مبدأ التجريد ، وذلك لأنه لا يفتح أى باب للشك فيما يخص بالنظرية الوجودية . أما فى كثير من الحالات التى يظهر فيها

الافتراق عن الاستعمال الجارى ، فقد يشك فى أننا لم نفعل ذلك أكثر من إضافة شىء من الضبط لمعنى كان إلى ذلك الوقت مبهماً إيهاماً كثيراً أو قليلاً .

ودفاعى عن نشر كتاب يشتمل على مثل هذا العدد الكثير من الصعوبات غير المحلولة هو أن البحث لم يكشف عن أمل قريب لحل كامل للتناقض الذى ناقشناه فى الباب العاشر ، أو البصر بإدراك أنفذ فى طبيعة القصول . وإن الكشف المتكرر عن أخطاء فى الحلول ، هذا الكشف الذى أراضانى بعض الوقت ، جعل هذه المشكلات تبدو وكأنها إنما كانت قد اختفت بسبب أى نظريات مقبولة فى الظاهر ، وقد يبرز هذه المشكلات أى تأمل أعمق . لذلك بدا لى أن مجرد ذكر الصعوبات أفضل من الانتظار حتى أصل إلى الاقتناع بحقيقة مذهب ما ، يكاد بطلانه يكون مؤكداً .

الجزء الأول

اللامعروفات في الرياضة

الباب الأول

تعريف الرياضة البحتة

١ - الرياضة البحتة هي باب جميع القضايا التي صورتها « و » يلزم عنها « ل » ، حيث « و » ، « ل » قضيتان تشتملان على متغير واحد أو جملة متغيرات هي بذاتها في القضيتين ، علماً بأن كلا من « و » ، « ل » لا تشتمل على ثوابت غير الثوابت المنطقية . والثوابت المنطقية هي كل المعاني التي يمكن تعريفها بدلالة الزوم ، وعلاقة الحد بالفصل الذي هو أحد أفرادها ، ومعنى قولك "مثل" ، ومعنى العلاقة ، إلى غير ذلك من المعاني التي تدخل في المعاني العامة للقضايا التي من هذا النوع السالف الذكر ، وفضلاً عن هذا فإن الرياضة تستخدم معنى هو في حد ذاته ليس جزءاً من القضايا التي تنظر فيها ، ذلك هو الصدق .

٢ - وهذا التعريف للرياضة البحتة هو ولا شك غير مألوف إلى حد ما . ومع ذلك فقد يبدو أنه يمكن تبرير مختلف أجزائه تبريراً دقيقاً هو غايتنا من وضع هذا المؤلف ، وسنبين أن كل ما اعتبر في الماضي داخلاً تحت الرياضة البحتة ، يدخل تحت هذا التعريف ، وأن كل ما يدخل تحت هذا التعريف غير ذلك ، فله تلك الخصائص التي تميز الرياضة عادة من غيرها من الدراسات ، وإن يك تمييزاً غير واضح المعالم . ونستطيع أن ندعي أن هذا التعريف ليس مجرد حذقة لغوية باستعمال الألفاظ في معنى غير مألوف ، ولكنه تحليل دقيق للمعاني التي تلزم بصفة لاشعورية تقريباً عن الاستعمال العادي لذلك الاصطلاح .

من أجل ذلك سنتبع الطريقة التحليلية ، ويمكن أن تسمى المشكلة التي نعالجها مشكلة فلسفية : بمعنى أننا نسير من المركب إلى البسيط ، ومن ذلك الذي يمكن إثباته ، إلى أصوله التي لا يمكن إثباتها ؛ ولكن غير قليل من بحثنا سيختلف من بعض الوجوه عن تلك التي تسمى عادة فلسفية . فبفضل أعمال الرياضيين ذاتهم سنجد أنه في مكتتنا أن نصل إلى اليقين في أغلب المسائل

التي نتصدى لها ، وسنجد أن كثيراً مما نقدر على حله منها حلاً كاملاً قد دخلت في الماضي في مختلف الشكوك التقليدية الناشئة عن الصراع الفلسفي . فطبيعة العدد ، واللاهاية ، والمكان ، والزمان ، والحركة ، وطبيعة الاستنتاج الرياضي ذاته ، هي جميعاً مسائل ستجد لها في هذا الكتاب جواباً يمكن إثباته بيقين رياضي — جواباً هو مع ذلك ردٌّ للمشكلات السابقة إلى مشكلات في المنطق البحث ، ولن تجد لهذه المشكلات الأخيرة حلاً مقبولاً فيما يلي من صفحات هذا الكتاب .

٣ — وما برحت فلسفة الرياضيات إلى يومنا هذا موضعَ جدل وغموض وعجز عن التقدم شأنها في ذلك شأن باقي فروع الفلسفة . ومع أنه كان من المسلم به بصفة عامة أن الرياضة كانت صحيحة بشكل من الأشكال ، إلا أن الفلاسفة قد تنازعوا على حقيقة مدلول القضايا الرياضية ؛ ومع أن شيئاً مما من هذه القضايا كان صحيحاً فلم يتفق اثنان على كنه هذا الشيء الصحيح ، ولو عُرِف شيء منها ، فإن أحداً لم يعرف ما هو هذا الشيء المعروف . وطالما بقي هذا موضع الشك فيبعد أن يقال إن أية معرفة يقينية ومضبوطة يمكن الحصول عليها في الرياضة . وهذا ما حدا بالمثاليين أن يميلوا شيئاً فشيئاً إلى اعتبار الرياضة معنية بمجرد المظهر . أما التجريبيون فقد اعتبروا كل ما هو رياضي تقريباً لحقيقة من الحقائق المضبوطة التي ليس لديهم ما يقولونه عنها . ولا بد من الاعتراف أن هذه الحالة لم يكن فيها ما يدعو إلى الرضى على الإطلاق . فالفلسفة تسأل الرياضة : ماذا تعني ؟ وكانت الرياضة في الماضي عاجزة عن الجواب . وأجابت الفلسفة بإدخال فكرة غريبة كل الغرابة عن الموضوع هي العقل . واليوم تستطيع الرياضة أن تجيب ، على الأقل ، بأن ترد جميع قضاياها إلى بعض المعاني الأساسية في المنطق . وعند هذه النقطة ينبغي أن يتولى المنطق البحث . وسأحاول أن أبين ما هي المعاني الأساسية التي نحتاج إليها ، وسأثبت بالتفصيل أننا لا نحتاج إلى غيرها في الرياضيات ، كما سأشير باختصار إلى الصعوبات الفلسفية التي تترص تحليل هذه المعاني . والبحث الكامل في هذه الصعوبات سيتطلب رسالة في المنطق ، وهو ما لن تجده في الصفحات التالية .

٤ - وإلى وقت قصير كانت هناك صعوبة خاصة بأصول الرياضة . فقد كان يظهر واضحاً أن الرياضة عبارة عن سلسلة من الاستنتاجات ؛ ومع ذلك فالطرق الاستنتاجية الحقة كانت جميعها ، أو غالبيتها ، مما لا يمكن تطبيقه على الرياضة المعروفة الآن .

فنظرية أرسطو في القياس المنطقي ، بل كذلك المذاهب الحديثة في المنطق الرمزي ، إما قاصرة من الوجهة النظرية عن الدليل الرياضى ، أو أنها تحتاج إلى صور صناعية من الصيغ يجعل تطبيقها مستحيلاً من الناحية العملية . وهذا هو سر قوة وجهة نظر « كانط » ، التى تقول بأن التفكير الرياضى ليس صورياً بالمعنى الدقيق ، لكنه يستخدم دائماً الحدس ، أى المعرفة الأولية بالمكان والزمان . ولكن بفضل تقدم المنطق الرمزي ، وبخاصة على يدى الأستاذ « بيانو » أمكن نقض هذا الجزء من فلسفة « كانط » نقضاً نهائياً لا يرد . فعشرة أصول للاستنتاج وعشرة مقدمات أخرى ذات طبيعة منطقية عامة (مثل : اللزوم علاقة) تكفى لاستنتاج الرياضة كلها بطريقة صورية مضبوطة . وكل ما يوجد فى الرياضة يمكن تعريفه بعبارة ما هو موجود فى المقدمات العشرين السالفة الذكر . ولا نقصد بالرياضة فى هذا القول مجرد الحساب أو التحليل ، ولكننا نقصد الهندسة أيضاً الأقليدية منها وغير الأقليدية ، والديناميكيا النسبية ، وعدداً لا يحصى من الدراسات الأخرى التى لم تولد بعد ، أو التى ما زالت فى مهدها . أما أن جميع الرياضة هى منطق رمزى فن أعظم كشف العصر الحاضر . وعند ما نقرر هذه الحقيقة يصبح ما بقى من الأصول الرياضية عبارة عن تحليل للمنطق الرمزى ذاته .

٥ - ولقد كان « ليبتر » من أشد أنصار النظرية القائلة بأن الرياضة عبارة عن استنباطات من الأصول المنطقية وفق الأصول المنطقية ، فقد كان « ليبتر » ينادى دائماً بأن البديهيات ينبغى أن تثبت ، وأن كل شئ يجب أن يعرف ، باستثناء عدد قليل من المعانى الأساسية - ولكن « ليبتر » وقع فى أخطاء جسيمة عند ما أخذ فى تنفيذ وجهة النظر هذه بالتفصيل ؛ والمعروف الآن أنها صحيحة (٣)

بصفة عامة^(١) . والسبب في فشل « ليبتر » هو المنطق الناقص والاعتقاد بالضرورة المنطقية لمهندسة أفليدس . ولكن نظريات أفليدس مثلاً لا يمكن استنباطها من مبادئ المنطق وحدها ، وإدراك هذه الحقيقة هو الذى أدى بالفيلسوف « كانط » إلى تجديده في نظرية المعرفة .

ومنذ نحو المهندسة غير الأفليدية ، وضح أن الرياضة البحتة لا شأن لها بما إذا كانت بديهيات ونظريات أفليدس صحيحة بالنسبة للمكان الفعلى أم لا ، فهذا من شأن الرياضة التطبيقية أن تقرره ، كلما أمكن ذلك ، بالتجربة والمشاهدة . وما تقرره الرياضة البحتة هو أن القضايا الأفليدية تستنبط من بديهيات أفليدس ، أى أنها تقرر لزوماً: فأى مكان له خواص كيت و كيت له أيضاً خواص أخرى كيت و كيت . فالهندسة الأفليدية والمهندسة اللاأفليدية كلاهما صحيح على حد سواء من وجهة نظر الرياضة البحتة ، إذ في كل منهما لا نثبت شيئاً غير اللزوم ؛ وجميع القضايا الخاصة بما هو واقع فعلاً مثل المكان الذى نعيش فيه هى من موضوعات العلوم التجريبية أو العلوم التى تقوم على التجربة وليست من موضوعات الرياضة البحتة . وهذه الموضوعات في الرياضة التطبيقية تنشأ عند ما نعطي واحداً أو أكثر من المتغيرات الداخلة في قضية من قضايا الرياضة البحتة قيمة ثابتة مآ تحقق الفرض ، وبذلك نستطيع فعلاً أن نقرر الفرض ونتأجه لقيمة المتغير هذه بدلا من مجرد تقرير اللزوم . ونحن نقرر دوماً في الرياضة أنه إذا صح الحكم و على أى شئ س أو على أية مجموعة من الأشياء س ، ص ، ط .. فإن حكماً آخر ك يكون صحيحاً على هذه الأشياء ولكننا لا نثبت حكماً عن و أولك منفصلاً عن هذه الأشياء ، فنحن نقرر علاقة بين الحكيمين و . ك سأسمها لزوماً صورياً .

٦ - ولا تتميز القضايا الرياضية بأنها تقرر لزوماً فحسب . ولكنها تتميز أيضاً بأنها تحوى « متغيرات » . وفكرة المتغير من أصعب المعانى التى على المنطق أن يعالجها . وعلى الرغم من كثرة مناقشاتنا لها على صفحات هذا الكتاب ،

فأكبر الظن أن القارئ لن يظفر بنظرية مقبولة عن طبيعة المتغير ، وسأكتفى في الوقت الحاضر بأن أوضح أن هناك متغيرات في جميع القضايا الرياضية حتى ولو بدت لأول وهلة خلوا من هذه المتغيرات . وقد يظن البعض أن الحساب الأولى مستثنى من هذه القاعدة ، فقولنا $2 = 1 + 1$ تبدو بأنها لا تحتوى على متغيرات ، ولا تقرر لزوماً . ولكن الواقع ، كما سنبين في الجزء الثاني - أن المعنى الصحيح لهذه القضية هو «إذا كان s هو الواحد الصحيح وكان v هو الواحد الصحيح ، وكان s مختلفاً عن v ، فإن s ، v هما اثنان » وهذه القضية تحتوى على متغيرات كما أنها تقرر لزوماً ، وسنرى دائماً في جميع القضايا الرياضية وقوع اللفظين «أى» أو «بعض» ، وهما علامة المتغير واللزوم الصورى. وعلى ذلك يمكن التعبير عن القضية السابقة بالصورة «أى وحدة وأى وحدة أخرى هما معاً وحدتان» ، والقضية النموذجية في الرياضة هي على الصورة ϕ (s) ، v ، τ ، . . .) يلزم عنها ψ (s ، v ، τ ، . . .) مهما كانت قيم s ، v ، τ ، . . . «حيث ϕ (s ، v ، τ ، . . .) ، ψ (s ، v ، τ ، . . .) هما قضيتان لكل مجموعة لقيم s ، v ، τ ، . . . ولا نقرر أن ϕ دائماً صحيحة ، ولا أن ψ دائماً صحيحة ، ولكننا نقرر أنه في جميع الحالات التى لا تصدق فيها ϕ ، كما في الحالات التى تصدق فيها ، فإن ψ تنتج عنها .

ولقد أضنى الاستخدام الرياضى شيئاً من الغموض على التفريق بين المتغير والثابت . فقد جرت العادة مثلاً أن نتكلم عن البارامترات على أنها ثوابت إلى حد ما ، وهذا أمر سوف لا نتبعه في هذا الكتاب . فالثابت يجب أن يكون شيئاً محدداً تحديداً مطلقاً ، شيئاً لا إيهام فيه ألبتة ، فمثلاً ١ ، ٢ ، ٣ ، هـ ، ط ، سقراط ، كلها ثوابت . كذلك ، الإنسان ، والجنس البشرى معتبراً كمجموعة في الماضى والحاضر والمستقبل ثوابت كذلك . والقضية ، واللزوم ، والفصل ، ألخ ثوابت. ولكن قولك ، قضية ، أية قضية ، قضية ماً ، فهذه ليست ثوابت لأن هذه العبارات لا تدل على شيء محدد بالذات . وعلى هذا فما نسميه بارامترات

ما هي إلا متغيرات ، خذ مثلاً المعادلة $1 س + 2 ب + 3 ص = ٥$ باعتبارها معادلة خط مستقيم في المستوى . فقد جرت العادة على الكلام عن $س$ ، $ب$ ، $ص$ بأنهما متغيران وعن $1 س + 2 ب + 3 ص$ ، بأنها ثوابت ، ولكن ما لم تكن نغنى خطأ واحداً معيناً بالذات مثل الخط المستقيم الخارج من نقطة معينة في لندن إلى نقطة معينة في كمبردج فإن $1 س + 2 ب + 3 ص$ ليست أعداداً محددة ، ولكنها تدل على أى أعداد ، وإذن فهي متغيرات . ونحن في الهندسة لا نتكلم عن مستقيم واحد بالذات ولكننا نتكلم عن أى مستقيم ، فنحن نجتمع الأزواج $س$ ، $ب$ ، $ص$ في فصول فصول ، ونعرف كل فصل بأنه مكون من تلك الأزواج التي لها علاقة ثابتة معينة بمجموعة ثلاثية واحدة ($1 س + 2 ب + 3 ص$) ولكن $1 س + 2 ب + 3 ص$ تتغير من فصل إلى فصل ، وبذلك تكون متغيرة .

٧ - وقد جرت العادة في الرياضة البحتة أن نقصر المتغيرات على فصول معينة ، ففي الحساب مثلاً تقوم المتغيرات مقام أعداد . ولكن هذا لا يعنى أكثر من أنها إذا دلت على أعداد فإنها تحقق بعض الصيغ ، أى أن افترضنا أنها أعداد تلزم عنه الصيغة . فهذا إذن هو ما نقرره ؛ وفي هذه القضية ليس من المهم أن تكون المتغيرات التي نتحدث عنها أعداداً فاللزوم موجود حتى لو لم تكن هذه أعداداً ، فالقضية التي تقول « إذا كانت $س$ ، $ب$ ، $ص$ أعداداً فإن $(س + ب) س^2 = س^2 + ٢ س ب + ب^2$ » تبقى صحيحة إذا وضعنا سقراط وأفلاطون بدلا من $س$ ، $ب$. حقا إن كلا من الفرض والنتيجة باطلان في هذه الحالة ولكن اللزوم سوف يبقى صحيحاً . ونخرج من هذا أنه عند صياغة قضايا الرياضة البحتة صياغة كاملة ، يكون للمتغيرات مجال غير مقيد . فأى شيء يمكن أن يحل محل أى متغير من متغيراتها دون أن يؤثر ذلك في صحة القضية .

٨ - ونستطيع أن نفهم الآن لماذا يجب أن نقصر الثوابت في الرياضة على

(١) من الضروري افتراض الجمع والضرب الحسابيين أنهما معرفان (وهو ما يمكن عمله بسهولة) حتى تبقى الصيغة المذكورة مفهومة حين لا يكون $س$ ، $ب$ ، $ص$ أعداداً .

الثوابت المنطقية بالمعنى الذى عرفناها به سابقاً - وعملية تحويل الثوابت فى قضية ما إلى متغيرات تؤدي إلى ما يسمى بالتعميم وتعطينا بهذا الاعتبار الماهية الشكلية لقضية جديدة . ويقتصر اهتمام الرياضاة البحتة على أنواع القضايا فإذا أثبتنا قضية ϕ مشتملة على ثوابت فقط ، ثم تخيلنا بدل أحد حدودها حدوداً أخرى على التعاقب ، فالنتيجة بوجه عام أن القضية تكون صحيحة فى بعض الأحيان وباطلة فى البعض الآخر . خذ مثلاً سقراط « إنسان » وحول سقراط إلى متغير بأن نقول « s إنسان » فبعض الفروض على s مثل « s إغريقى » تحقق صحة قولك « s إنسان » بحيث تكون « s إغريقى » ينتج عنه أن « s إنسان » وهذا صحيح لجميع قيم s . ولكن هذه العبارة ليست رياضية لأنها تتوقف على طبيعة إغريقى ، وإنسان . وفى الإمكان تغيير هذين أيضاً بأن نقول : إذا كان a ، b فصلين ، وكان a داخل b فى الفصل b ، فيترتب على ذلك أن « s هى a » يلزم عنها أن « s هى b » . وأخيراً ها قد وصلنا إلى قضية فى الرياضاة البحتة مشتملة على ثلاثة متغيرات ، وعلى ثوابت هى الفصل ، والدخول فى الفصل ، وتلك المتضمنة فى فكرة الزوم الصورى بالمتغيرات . وطالما كان هناك حد فى القضية يمكن تحويله إلى متغير ، فإنه يمكن تعميم هذه القضية . وكلما كان ذلك ممكننا فإن من وظيفة الرياضاة البحتة أن تقوم به ، وإذا كانت هناك عدة سلاسل من الاستنتاجات لا تختلف إلا فى معانى الرموز بحيث تكون للقضايا المتطابقة رموزاً عدة تفسيرات ، فإن الطريق السليم من الناحية الرياضية هو إيجاد فصل يشمل المعانى التى يمكن أن تأخذها الرموز ثم الحكم بأن الصيغة الجديدة تلزم عن افراض أن الرموز تنتمى إلى ذلك الفصل ، وبهذه الطريقة تحول الرموز التى كانت تدل على ثوابت إلى متغيرات ، ويحل محلها ثوابت جديدة تتكون من فصول تنتمى إليها الثوابت القديمة . ومثل هذا التعميم هو فى الرياضاة من الكثرة بحيث تخطر الأمثلة العديدة على بال كل رياضى ، وسنجد فى هذا الكتاب ^١ لا حصر له من الأمثلة على ذلك . فكلما كان لمجموعتين من الحدود علاقات متبادلة من نفس النوع فإن الصورة ذاتها من الاستنتاج

تنطبق على كل منهما . فثلاً العلاقات المتبادلة بين النقط فى الهندسة الأقليدية المستوية هى من نفس نوع العلاقات المتبادلة بين الأعداد المركبة ، ولذلك فإن الهندسة المستوية كفرع من فروع الرياضه البحتة ينبغى ألا تفرق بين النقط أو الأعداد المركبة أو أى مجموعة أخرى من الأشياء لها ذات النوع من العلاقات المتبادلة . ويمكن القول بصفة عامة إن كل فرع من فروع الرياضه يعنى بأى فصل من الأشياء التى لها علاقات متبادلة من نوع معين بالذات وبذلك يصبح الفصل ، كما يصبح الحد المعين المذكور ، متغيراً ؛ أما الثوابت الحقيقية فقط فهى أنواع العلاقات وما يدخل فيها . ونعنى فى هذا المقام بنوع العلاقة ، فصلاً من العلاقات يتميز بما سبق ذكره من التطابق الصورى للاستنتاجات التى يمكن إجراؤها على مختلف حدود ذلك الفصل ، وبذلك يكون نوع العلاقات على الدوام فصلاً يمكن تعريفه بدلالة الثوابت المنطقية ، وهذا أمر سيظهر بوضوح أكثر فيما بعد إذا لم يكن قد وضع فعلاً^(١) . ويمكننا إذن أن نعرف نوع العلاقات بأنه فصل من العلاقات يتميز بخاصية يمكن تعريفها بدلالة الثوابت المنطقية وحدها .

٩ - وينبغى إذن ألا يدخل فى الرياضه البحتة شىء لا يمكن تعريفه فيما خلا الثوابت المنطقية ، وعلى ذلك يجب ألا يدخل فى الرياضه من المقدمات أو القضايا التى لا يمكن إثباتها غير تلك التى تعالج فقط الثوابت المنطقية والمتغيرات . وهذا بالضبط هو الفرق بين الرياضه البحتة والتطبيقية . فالتنازح المترتبة على فرض ما بالنسبة للمتغير والتى قام عليها البرهان بالرياضه البحتة يحكم بها فعلاً فى الرياضه التطبيقية على ثابت ما يحقق الفرض المذكور . بذلك تصبح الحدود التى كانت ثابتة متغيرة . ويحتاج دائماً إلى مقدمة جديدة ، وهى أن هذا الشىء بالذات يحقق الفرض المذكور . فثلاً الهندسة الأقليدية كفرع من فروع الرياضه البحتة ، تتكون جميعها من قضايا تقوم على هذا الفرض

(١) الواحد بالواحد ، والكثير بالواحد ، والمتعدى ، والمتماثل هى أمثلة لأصناف العلاقات التى سنقضى بها فى القالب .

وهو أن « م مكان أقلدي » فإذا انتقلنا إلى القول بأن « المكان الموجود مكان أقلدي » أمكننا أن نحكم على المكان الموجود بجميع نتائج فروض الهندسة الأقليدية ، حيث أننا قد وضعنا بدلاً من المتغير ف هذا الثابت وهو المكان الواقعي ، ولكن هذا يخرجنا من الرياضة البحتة إلى الرياضة التطبيقية .

١٠ - نخرج مما سبق بأن الصلة بين الرياضة والمنطق جد وثيقة . فإن كون جميع الثوابت الرياضية ثوابت منطقية بها تتعلق جميع المقدمات الرياضية فهذا ، في اعتقادي ، هو معنى ما ذهب إليه الفلاسفة في قولهم بأن الرياضة أولية . والواقع أنه عند ما نسلم بالجهاز المنطقي فالرياضة حتماً تتبعه ، والثوابت المنطقية ذاتها إنما تعرف بسردها لأنها أساسية لدرجة أن الخصائص التي يمكن بها تعريف الفصل منها تفترض مقدماً بعض حدود هذا الفصل .

ولكن من الناحية العملية نجد أن طريقة الكشف عن الثوابت المنطقية هي بتحليل المنطق الرمزي الذي سيكون موضوع الأبواب التالية ، والتمييز بين الرياضة والمنطق أمراً اختياري . وإذا شئنا التمييز بينهما فذلك على النحو الآتي : يتألف المنطق من المقدمات الرياضية بالإضافة إلى جميع القضايا الأخرى التي تعني فقط بالثوابت المنطقية ، وبالتغيرات التي لا تحقق التعريف الذي وضعناه للرياضة (بند ١) . والرياضة تتكون من جميع نتائج المقدمات السابقة التي تقرر لزوماً صورياً يشتمل على متغيرات بالإضافة إلى بعض تلك المقدمات ذاتها التي تحمل هذا الطابع . وبناء على هذا تكون بعض المقدمات الرياضية مثل مبدأ القياس المنطقي كقولك : « إذا كانت و تلزم عنها ك وكانت ك تلزم عنها م فإن ق تلزم عنها م » هي من الرياضيات ، بينما البعض الآخر مثل « التزوم علاقة » هي من المنطق وليست من الرياضة . ولولا ما جرى عليه العرف لقلنا : إن الرياضة والمنطق متطابقان ، ولعرفنا كلا منهما بأنه فصل القضايا التي تشتمل فقط على متغيرات وثوابت منطقية . ولكن احتراي للعرف يجعلني أفضّل الإبقاء على التمييز السابق مع اعتقادي بأن بعض القضايا مشتركة بين العلمين .

ومما سبق يدرك القارئ أن هذا الكتاب يحقق غرضين :

الأول : أن يبين أن الرياضة بأكملها تقوم على المنطق الرمزي .
 والثاني : أن يكشف على قدر الإمكان عن أصول المنطق الرمزي ذاته .
 وسنحاول تحقيق الغرض الأول في الأجزاء التالية . أما الغرض الثاني فهو موضوع
 الجزء الأول . وكقائمة للتحليل الدقيق يجب قبل كل شيء أن نشرح بإيجاز
 المنطق الرمزي باعتباره مجرد فرع من فروع الرياضة البحتة . وهذا هو موضوع
 الباب التالي .

الباب الثاني المنطق الرمزي

١١ - المنطق الرمزي أو الصوري - وهما اصطلاحان ساستعملهما مترادفين ، هو دراسة مختلف الأنواع العامة للاستنباط . ولقد أطلقت كلمة رمزي على هذه الدراسة لخاصية عرضية ، لأن استخدام الرموز الرياضية في هذه الدراسة وفي غيرها هو مجرد أمر مناسب من الناحية النظرية لا تحليه طبيعة الأشياء . والقياس المنطقي بجميع أشكاله يتصل بالمنطق الرمزي ، وكان يمكن أن يكون جميع المنطق الرمزي لو أن جميع الاستنباطات كانت قياسية كما افترضت التقاليد المدرسية . ويرجع الفضل إلى الاستدلالات غير القياسية في أن المنطق الرمزي الحديث ابتداء من « ليبستر » ومن جاء بعده قد استمد الدافع إلى التقدم . فنجد نشر « بول » كتابه عن « قوانين الفكر » عام ١٨٥٤ توبعت دراسة الموضوع بنشاط عظيم ووصلت إلى درجة عالية من التقدم الفني . ومع ذلك فلم تظهر لهذا العلم منفعة للفلسفة أو لفروع الرياضة الأخرى حتى جاء الأستاذ « بيانو » بمناهجه الحديثة فتطور به ^(١) . ولم يصبح المنطق الرمزي اليوم أساسياً فقط لكل منطقي مشغول بالفلسفة بل ضروريا كذلك لفهم الرياضة عامة ، وهو لازم حتى لممارسة بعض فروع الرياضة ممارسة ناجحة . وكل الذين خبروا السلاح القوي الذي وضعته الدراية بهذا العلم في أيدي الباحثين ، يتركون مقدار فائدته العملية . أما وظائفه النظرية فيجب أن نشرحها باختصار في هذا الباب ^(٢) .

(١) انظر Formulaire de Mathématique que, Turin, ١895 وطبعاته التالية السنوات التالية؛ وكذلك (١900) Revue de Mathématique, Vol VII, No ١ وستشير إلى طبعات كتاب Formulaire على هذا النحو F ١895 وهكذا. أما Revue de Mathématique وهي التي كانت في الأصل Rivista di Matematica فنشير إليها بهذه الحروف R d M (٢) فيما يأتي بعد الفكرة العامة ترجع إلى الأستاذ بيانو ، ما عدا فيما يختص بالملاحظات . وحتى في تلك الحالات التي اختلف فيها عن آرائه فإن المشكلات المذكورة قد أوصتها إلى مؤلفاته .

١٢ - والمنطق الرمزي مختص أساساً بالاستدلال بوجه عام ^(١) ويتميز خاصة عن مختلف فروع الرياضة الخاصة بصفته العامة . فلا الرياضة ، ولا المنطق الرمزي يختص بدراسة العلاقات الخاصة مثل « التقدم الزماني » ولكن الرياضة مختصة بصفة صريحة بفصل العلاقات ذات الخصائص الصورية للتقدم الزماني ، وهي الخصائص التي تجتمع في فكرة الاتصال ^(٢) . ويمكن أن تعرف الخصائص الصورية للعلاقة بأنها تلك التي يمكن التعبير عنها بالتوابت المنطقية أو هي تلك الخصائص التي وإن حافظت على صورتها ، تسمح للعلاقة أن تتغير بدون أن تنقض الاستدلال الذي نعتبر فيه تلك العلاقة على ضوء المتغير . ولكن المنطق الرمزي بالمعنى الضيق ، وهو المناسب ، لا يبحث في الاستدلالات الممكنة بالنسبة للعلاقة المتصلة (مثل العلاقات التي تنتج سلسلة متصلة) . وهذا البحث خاص بالرياضة ، ولكنه أخص من أن يكون من جملة دراسات المنطق الرمزي . وما يبحث فيه المنطق الرمزي هو القواعد العامة التي يجري الاستدلال عليها ، وهو إنما يحتاج إلى تبويب العلاقات أو القضايا من حيث أن هذه القواعد العامة تقدم معاني خاصة . والمعاني الخاصة التي تظهر في قضايا المنطق الرمزي وفهمها مما يمكن تعريفه بدلالة هذه المعاني فهي التوابت المنطقية . وعدد التوابت المنطقية التي لا يمكن تعريفها ليس كثيراً ، وهو في الواقع لا يعدو الثمانية أو التسعة . وهذه المعاني وحدها هي موضوع الرياضة بأكملها ولا يدخل غيرها في الحساب أو الهندسة أو الديناميكا النسبية اللهم إلا تلك المعاني التي يمكن تعريفها بدلالة هذه المعاني الثمانية أو التسعة الأصلية . وفي الدراسة الفنية للمنطق الرمزي من المناسب أن نتخذ شيئاً واحداً لا يمكن تعريفه هو فكرة اللزوم الصوري ، مثل قولنا « س إنسان يلزم عنها أن س فان لجميع قيم س » أما القضايا التي تدخل تحت النوع العام « Φ (س) يلزم

(١) قد أقول كذلك على الفور أنني لا أميز بين الاستدلال والاستنباط . ويبدو لي أن ما يسمى استقراء فهو إما استنباط خفي ، وإما مجرد طريقة تجعل التخمينات مقبولة .

(٢) انظر فيما بعد الجزء الخامس الباب السادس والثلاثين .

عنها Ψ (س) لجميع قيم س ، حيث Φ (س) ، Ψ (س) هما بدورهما قضيتان لجميع قيم س . أما تحليل هذه الفكرة من اللزوم الصورى فهي من أصول هذا العلم ولكننا لا نحتاج إليها في كماله الصورى . وبالإضافة إلى هذه الفكرة نحتاج إلى اللامعرفات الآتية : اللزوم بين القضايا التى لا تشمل على متغيرات ، وعلاقة الحد بالفصل الذى هو فرد منه ، وفكرة مثل كذا ، وفكرة العلاقة ، والصدق . وبهذه الأفكار يمكن صياغة جميع قضايا المنطق الرمزى .

١٣ — يتكون المنطق الرمزى من ثلاثة أقسام هى الحساب التحليلى للقضايا ، والحساب التحليلى للفصول ، والحساب التحليلى للعلاقات . ويوجد بين القسمين الأول والثانى داخل حدود خاصة ، تواز معين ينشأ كما يأتى : فى أى تعبير رمزى يمكن تفسير الحروف على أنها فصول أو قضايا وحينئذ يمكن استبدال اللزوم الصورى فى الحالة الثانية بعلاقة الاستغراق فى الحالة الأولى . فمثلا من مبدأ القياس المنطقى أنه إذا كانت A ، B ، C ثلاثة فصول ، وكانت A داخلة فى B ، وكانت B داخلة فى C ، فإن A تكون داخلة فى C ، وإذا كانت A ، B ، C ثلاث قضايا ، وكانت A يلزم عنها B ، B يلزم عنها C فإن A يلزم عنها C . ولقد استغلت هذه الثنائية استغلالا كبيرا حتى لقد يبدو أن « بيانوه » فى الطبعة الأخيرة من كتابه المسمى Formulaire قد ضحى بالدقة المنطقية فى سبيل الاحتفاظ بهذه الثنائية^(١) ، ولكن الواقع أن حساب العلاقات يختلف عن حساب الفصول فى كثير من الوجوه . خذ مثلا « إذا كانت Q ، L ، S ثلاث قضايا وكانت Q يلزم عنها L أو S ، فإن Q يلزم عنها L أو Q يلزم عنها S » وهذه القضية صادقة ولكن مثلها كاذبة ، وهى قولك « إذا كانت A ، B ، C فصلا وكانت A داخلة فى B أو C ، فإن A تكون داخلة فى B ، أو أن A تكون داخلة فى C » . خذ مثلا الشعب الإنجليزى جميعه إما رجال وإما نساء ، ولكنه ليس كله رجالا وليس كله نساء . وقاعدة الثنائية صحيحة عن

(١) فى النقط التى لا تصلح فيها الثنائية ، انظر ، Schroder, op cit , Vol II,

القضايا التي تقرر دخول حد متغير في فصل ، مثل قولك « س إنسان » بشرط أن يكون الزوم الداخل في هذا صوريا ، أى أنه لزوم صحيح لجميع قيم س . ولكن قولك « س إنسان » ليست قضية على الإطلاق ، لأنها لا تحتل الصدق أو الكذب . ومثل هذه القضايا ليست من اختصاص حساب العلاقات لأنه مختص بالقضايا الحقيقية . وثمة أمثلة أخرى لتوضيح ما سبق : فإذا قلنا إن « س إما أن يكون رجلا أو امرأة » لجميع قيم س ، فإن ذلك إما أن يلزم عنه « س رجل » وإما أن يلزم عنه أن « س امرأة » وهذا صحيح . أما قولك « س إما أن يكون رجلا أو امرأة » يلزم عنها إما أن يكون « س رجلا » لجميع قيم س ، أو أن يكون « س امرأة » لجميع قيم س ، فهو قضية غير صادقة . ومنه يظهر أن الزوم المشتق من هذا ، والذي هو دائماً إحدى اثنتين فليس صوريا ، مادام ليس صحيحاً لجميع قيم س ؛ إذ قد يختلف الزوم من واحدة إلى أخرى كلما اختلفت قيم س . وإن التشابه الغريب في الرموز بين منطقي العلاقات ومنطقي الفصول لمدعاة للخداع ، ولا بد من أن نقرر أيهما سيكون الأساس عندنا . ولقد دافع المستر « ماكول » McColl ، في سلسلة هامة من البحوث^(١) عن وجهة النظر التي تقول بأن الزوم والقضايا أساسية أكثر من الفصول والاستغراق . وأنا متفق معه في هذا الرأي ، إلا أنه يبدو لي أنه غير مقدر تمام التقدير الفرق بين القضية الحقيقية وتلك التي تحتوى على متغير حقيقي ، فانساق مثلا إلى الكلام عن القضايا على أنها تكون صادقة في بعض الأحيان وكاذبة في البعض الآخر ، وبطبيعة الحال هذا مستحيل في حالة القضايا الحقيقية . ولما كانت التفرقة المشار إليها بالغة الأهمية فسنقف عندها قليلا ، قبل المضي في بحثنا . فقد نقول إن القضية هي أى شئ يحتمل الصدق أو الكذب . وقولك « س إنسان » ليس إذن قضية لأنها لا هي صادقة ولا هي كاذبة . فإذا أخذت

(١) انظر "The Calculus of Equivalent Statement" Proceedings of the London Mathematical Society, Vol. IX and subsequent volumes; "Symbolic Reasoning" Mind, Jan. 1880, Oct. 1897, and Jan. 1900. "La Logique Symbolique et ses Applications" Bibliothèque du Congrès Internationale d. Philosophie Vol. III (Paris 1901) وسوف أقتبس فيها بعد من أعمال هذا المؤتمر مشيراً إلى ذلك باسم « مؤتمر » .

من قيمة ثابتة أيا كانت ، فإن العبارة السابقة تصبح قضية ؛ فكأنها إذن صورة تخطيطية لأى واحد من فصل بأجمعه من القضايا ، وعند ما نقول « من إنسان » يلزم عنها أن يكون « من فانياً لجميع قيم من » فإننا لا نقرر لزوماً واحداً بمفرده ، ولكن فصلاً من اللزوم ، فهذه قضية حقة لا يوجد فيها متغير حقيقى ولو أن من تظهر فيها ، إلا أنها تختفى بنفس الطريقة كالمتغير من تحت علامة التكامل فى التكامل المعين فلا تصبح النتيجة دالة للمتغير من . ويميز « بيانو » المتغير الذى يظهر فى هذه الصورة بأنه ظاهرى ما دامت القضية لا تتوقف على المتغير ، بينما فى قولك « من إنسان » هناك قضايا مختلفة لقيم من المختلفة ، والمتغير هو ما أسماه بيانو بالمتغير الحقيقى^(١) . وسأتكلم عن القضايا عند ما لا يكون هناك متغير حقيقى . أما إذا كان هناك متغير حقيقى أو أكثر ، وكانت العبارة قضية لجميع قيم المتغير ، فلنسمى العبارة « دالة قضية » . وفى نظرى أن دراسة القضايا الحققة أساسية أكثر من دراسة الفصول ، ولكن دراسة دوال القضايا يبدو كأنها على قدم المساواة مع الفصول ، ويكاد لا يكون بينهما فرق . ولقد اعتبر « بيانو » ، « وما كول » كذلك ، أول الأمر القضايا أساسية أكثر من الفصول ، ولكنه بالتحديد جعل دوال القضايا أولى بالاعتبار من القضايا . ولا يمكن توجيه هذا النقد إلى « شريدلر » فقد عالج فى الجزء الثانى من كتابه القضايا الحققة ، وأشار إلى الفروق الصورية بينها وبين الفصول .

١ - تحليل القضايا

١٤ - يتميز الحساب التحليلى للقضايا بحقيقة أن جميع قضاياها لها فروض ولها نتيجة هى تقرير لزوم مادى ، والقرض عادة من هذه الصورة « و يلزم عنها لـ » إلخ . وهذا يساوى القول (انظر بند ١٦) بأن الحروف التى تقع فى النتيجة هى قضايا ، وعلى ذلك تكون النتائج عبارة عن دوال قضايا صحيحة

(١) انظر كتابه Formulaire ص ٢ .

لجميع القضايا ، ومن المهم ملاحظة أنه مع أن الحروف المستخلصة ترمز إلى متغيرات وأن النتائج صحيحة عند ما تأخذ المتغيرات قيما هي ذاتها قضايا ، فإن هذه القيم ينبغي أن تكون قضايا حقة لا دوال قضايا . فقولك « و قضية » لا يتحقق إذا وضعنا بدلا من و « س إنسان » ولكنه يتحقق إذا وضعنا « س قراط إنسان » أو إذا وضعنا « س إنسان » يلزم عنها أن س فان لجميع قيم س . وبالاختصار يمكن أن نقول إن القضايا المثلة في هذا الحساب التحليلي برموز هي متغيرات ، ولكنها لا تشتمل على متغيرات عند ما يراد تحقيق فروض القضية التي يقررها هذا التحليل .

١٥ - فهذا الحساب التحليلي يدرس علاقة الزوم بين القضايا . ويجب التمييز بين هذه العلاقة وبين علاقة الزوم الصوري التي تقوم بين دوال القضايا عند ما يلزم عن إحداها الأخرى لجميع قيم المتغير . والازوم الصوري داخل أيضاً في هذا التحليل ، ولكننا لا ندرسه بصراحة ، فنحن لا ندرس دوال القضايا بصفة عامة ولكننا ندرس بعض دوال القضايا المحددة التي نصادفها في نظريات حسابنا التحليل . أما إلى أي حد يمكن تعريف الزوم الصوري بصفة الزوم فقط ، أو الزوم المادى كما قد يسمى ، فهذا سؤال يصعب الإجابة عنه ، وسنبحثه في الباب الثالث . وأما الفرق بين النوعين فسنبوضحه بالمثال الآتى : فالقضية الخامسة لأقليدس تنتج من الرابعة ، فإذا كانت الرابعة صحيحة كانت الخامسة صحيحة كذلك ، وإذا كانت الخامسة باطلة كانت الرابعة باطلة كذلك . فهذا مثلٌ على الزوم المادى لأن كلا من القضيتين ثابت مطلق لا تتوقف في معناها على تعيين قيمة لمتغير . ولكن كلا من القضيتين تقرر لزوماً صوريا ، فالقضية الرابعة تقرر أنه إذا كان س ، ص مثلين يحققان شروطاً معينة ، كان س ، ص مثلين يحققان شروطاً أخرى معينة وأن هذا الزوم صحيح لجميع قيم س ، ص ، والقضية الخامسة تقرر أنه إذا كان س مثلثاً متساوياً الساقين كانت زاويتا قاعدة س متساويتين ، والازوم الصوري الداخلى في كل من هاتين القضيتين أمرٌ جد مختلف عن الزوم المادى القائم بين

القضيتين بأكملهما ، ونحن نحتاج إلى كل من هذين المعنيين في الحساب التحليلي للقضايا ، ولكن دراسة الزوم المادى هى بصفة خاصة التى تميز هذا الموضوع ، لأن الزوم الصورى داخل فى كل فرع من فروع الرياضة .

وقد جرت العادة أن يخلط بين هذين النوعين من الزوم فى كتب المنطق ، وكثيراً ما كان الكلام فيها يتناول النوع الصورى فى حين يكون واضحاً أننا أمام النوع المادى وحده . فمثلاً عند ما نقول : « سقراط إنسان ، إذن سقراط فان » نشعر بأن سقراط متغير ، وأنه نموذج الإنسانية وأن أى إنسان مكانه كان يؤدى الغرض ذاته ، فإذا وضعنا « سقراط إنسان يلزم عنها أن سقراط فان » بدلا من كلمة إذن التى تدل على صدق الفرض والنتيجة ، فإنه يتضح على الفور أننا يمكننا أن نضع أى إنسان بل وأى كائن آخر بدلا من سقراط . وواضح أنه ولو أن النص الظاهر هو عن الزوم المادى فإن المفهوم هو لزوم صورى . وأتينا لا بد من أن نبذل مجهوداً إذا أردنا أن نقصر خيالنا على الزوم المادى .

١٦ - ومن المستحيل وضع تعريف الزوم . فإذا قلنا إنه يلزم عنها له ، فإن كانت له صحيحة فإن له صحيحة ، أى أن صدق له يلزم عنه صدق له . كذلك إذا كانت له باطلة كانت له باطلة ، أى أن بطلان له يلزم عنه بطلان له . أى أن الصدق والكذب يؤدى بنا إلى لزوم جديد ولا يعطينا تعريفاً للزوم . وإذا كانت له يلزم عنها له فإن كليهما يكون صادقاً ، أو كليهما يكون كاذباً ، أو أن له كاذبة ، له صادقة . ومن المستحيل أن تكون له كاذبة ، له صادقة بل يلزم أن تكون له صادقة أو له كاذبة . وفى الواقع أن الحكم بأن له صادقة أو له كاذبة يساوى تماماً الحكم بأن « له يلزم عنها له » . ولما كان التكافؤ معناه الزوم المتبادل فسيبقى الزوم أساسياً ، ولا يمكن تعريفه بعبارة الانفصال ؛ ومن جهة أخرى فإن الانفصال يمكن تعريفه بعبارة الزوم سبائى . ذكره حالا . ويترب على التكافؤ المشار إليه أن من كل قضيتين لا بد أن واحدة تلزم عنها الأخرى ، وأن القضايا الكاذبة يلزم عنها جميع القضايا ، وأن القضايا الصادقة تلزم عن جميع القضايا ؛ ولكن هذه نتائج يجب إثباتها .

أما مقدمات موضوعنا فتقتصر على البحث في قواعد الاستدلال .

وما هو جدير بالملاحظة أنه ولو أن الزوم لا يمكن تعريفه ، إلا أن القضية يمكن تعريفها . فكل قضية يلزم عنها نفسها ، وما هو ليس بقضية لا يلزم عنه شيء . وعلى هذا فقولك « قضية » يكافئ قولك « و يلزم عنها و » ويمكن استخدام هذا التكافؤ في تعريف القضايا . ولما كان المعنى الرياضى للتعريف مختلفاً اختلافاً بيناً عما جرى عليه عرف الفلاسفة ، يحسن أن يلاحظ أنه فى المعنى الرياضى يقال إن دالة قضايا قد عرفت عند ما نقرر أنها مكافئة (أى يلزم عنها أو تلزم عن) لدالة قضية يكون قد سبق التسليم بعدم إمكان تعريفها أو قد سبق تعريفها بدلالة ما لا يمكن تعريفه ، أما تعريف الأشياء التى ليست دوال قضايا فيشتق من الوسائل التى سنشرحها عند الكلام عن الفصول والعلاقات .

١٧ - نحن إذن لا نحتاج إلى مسلمات لا يمكن تعريفها فى الحساب التحليلى إلا هذين النوعين من الزوم ؛ ولكن ينبغي أن نذكر أن الزوم الصورى فكرة معقدة ينبغي علينا أن نحللها - أما عن هذين اللذين سلمنا بهما دون تعريف ، فإننا نحتاج فى أمرهما إلى قضايا لا يمكن إثباتها ، ولم أنجح إلى الآن فى تخفيض عددها إلى أقل من عشرة . وبعض هذه التى لا يمكن إثباتها يجب أن تكون موجودة ، وبعض القضايا مثل القياس يجب أن تدخل ضمن هذا العدد ، ما دام البرهان غير ممكن بدونها ، أما غير ذلك فليس مقطوعاً به ، هل هو مما لا يمكن إثباته أو مما لم يثبت بعد . وينبغى أن نذكر أن الطريقة المتبعة فى فرض بديهية ما بأنها باطلة ، ثم استنباط نتائج من هذا الفرض ، وهى الطريقة التى نجحت نجاحاً عظيماً فى بديهية التوازى ، ليست دائماً فى متناول أيدينا ؛ ذلك أن جميع بديهياتنا هى مبادئ الاستنباط ، فإذا كانت هذه المبادئ صحيحة ، فإن النتائج التى يظهر أنها ترتب عن استخدام عكس هذه المبادئ لن ترتب حقيقة . ولذا فإن الحجج التى تنشأ عن افتراض بطلان بديهية تكون عرضة لمغالطات خاصة . ومن كل هذا يبدو أن عدد القضايا التى

لا يمكن إثباتها قد تخفض أكثر من ذلك . وفيما يختص ببعض هذه القضايا فليس عندي من سبب لاعتبارها غير قابلة للإثبات إلا أنها بقيت حتى الآن بغير إثبات .

١٨ - والبدييات العشر هي (١) إذا كانت ϕ يلزم عنها ψ ، فإن ψ يلزم عنها ϕ ، أو في صيغة أخرى : مهما كانت ψ ، ϕ فإن ψ يلزم عنها ϕ قضية . (٢) إذا كانت ϕ يلزم عنها ψ ، فإن ψ يلزم عنها ϕ ، وفي صيغة أخرى كل ما يلزم عنه شيء فهو قضية . (٣) إذا كانت ϕ يلزم عنها ψ فإن ϕ يلزم عنها ψ ، وفي صيغة أخرى كل ما يلزم عن شيء فهو قضية . (٤) المقدم الحقيقي في التلزم يمكن إسقاطه ، والحكم بالتالي . وهذه قاعدة لا يمكن التعبير عنها بالرمز الصوري ، وتوضح القصور الأساسي للصورية . وسأرجع إلى بحث هذه المسألة فيما بعد . ومن المستحسن ، قبل أن نمضي بعيداً ، أن نعرف الحكم المقترن عن قضيتين أو ما يعرف بحاصل ضربهما المنطقي . وهذا تعريف مصطنع جداً ويوضح الفرق العظيم بين التعريفات الرياضية والتعريفات الفلسفية . وهذا التعريف هو : إذا كانت ϕ يلزم عنها ψ ، وإذا كانت ϕ يلزم عنها ψ ، فإن ϕ (حاصل ضرب ϕ و ψ) المنطقي معناها أنه إذا كانت ϕ يلزم عنها ψ أن ϕ يلزم عنها ψ كانت ψ صحيحة . وفي صيغة أخرى إذا كانت ϕ ، ψ قضيتين فإن حكمهما المقترن يكافئ قولنا ، كل قضية اقترانية صادقة متى كانت بحيث أن القضية الأولى يلزم عنها أن الثانية تلزم عن الأولى . ونحن لا نستطيع وضع التعريف في هذه الصورة المختصرة مع الاحتفاظ بصحة الوضع الصوري . لأن قولنا أن ϕ و ψ قضيتان ، هو في حد ذاته حاصل الضرب المنطقي لكل من ϕ و ψ قضية ، ϕ و ψ قضية . ونذكر الآن نصوص المبادئ الستة الأساسية للاستنباط ، ونظراً لأهميتها فقد أطلق على كل منها اسم خاص ، وجميعها فيما عدا الأخيرة منها ، يجهلها القارئ في مؤلف « بيانو » . (٥) إذا كانت ϕ يلزم عنها ψ ، وكانت ϕ يلزم عنها ψ ، فإن ϕ يلزم عنها ψ . ويسمى هذا « التبسيط » ، وينص على مجرد أن الحكم المقترن عن (٤)

قضيتين يلزم عنه الحكم بأولى القضيتين . (٦) إذا كانت ψ يلزم عنها ϕ ولك
 يلزم عنها ϕ ، فإن ψ يلزم عنها ϕ . ويسمى هذا بالقياس . (٧) إذا كانت
 ϕ يلزم عنها ϕ و ϕ يلزم عنها ϕ ، وكانت ψ يلزم عنها أن ϕ يلزم عنها ϕ ،
 فإن ψ ϕ يلزم عنها ϕ ، وتسمى هذه قاعدة الاستيراد . ونجد فرضاً حاصل
 ضرب ثلاث قضايا ، ولكن هذا يمكن تعريفه بطبيعة الحال بدلالة حاصل
 ضرب اثنتين فقط . وتنص القاعدة على أنه إذا كانت ψ يلزم عنها أن ϕ يلزم
 عنها ϕ ، فإن ϕ تلزم عن الحكم الاقتراني عن التضمين ψ ، ϕ فنلا : إذا
 طرقتُ باب فلانة فإذا كانت في داخل المنزل فسيُسمح لي بالدخول ، يلزم
 عنه أنه إذا طرقتُ باب فلانة وهي في المنزل دخلت . (٨) إذا كانت ψ
 يلزم عنها ψ وكانت ϕ يلزم عنها ϕ ، حيثُ إذا كانت ψ ϕ يلزم عنها ϕ ،
 فإن ψ يلزم عنها أن ϕ يلزم عنها ϕ . وهذه عكس القاعدة السابقة وتسمى التصدير
 وتوضح هذه القاعدة بالمثال السابق معكوساً (٩) إذا كانت ψ يلزم عنها ϕ ،
 وكانت ψ يلزم عنها ϕ ، فإن ψ يلزم عنها ϕ ، وفي صيغة أخرى كل قضية
 يلزم عنها كل من قضيتين فإنهما معاً يلزمان عنها . وتسمى هذه بقاعدة التركيب
 (١٠) إذا كانت ψ يلزم عنها ψ ، وكانت ϕ يلزم عنها ϕ ، فإن « ψ يلزم
 عنها ϕ ، يلزم عنها ψ » يلزم عنها ψ ، وتسمى هذه قاعدة الاختزال . وهذه
 أقل وضوحاً بذاتها مما سبقها من القواعد ولكنها تكافئ كثيراً من القضايا الواضحة
 بذاتها غير أنني أفضّلها عليها لأنها تقوم صراحة على الزوم كسابقاتها ، ولها
 أيضاً نفس الصفة المنطقية . وإذا تذكرنا أن « ψ يلزم عنها ϕ » تكافئ « ϕ
 أو لا ϕ » أمكننا أن نقنع أنفسنا بصحة القاعدة السابقة لأن « ψ يلزم عنها ϕ
 يلزم عنها ψ » تكافئ قولك « ψ أو بطلان ϕ أو لا ϕ » أو قولك « ψ أو ϕ
 أو لا ϕ » أي « ψ . ولكن هذه الطريقة في الاقتناع بأن قاعدة الاختزال صحيحة
 تحتاج إلى كثير من قواعد المنطق التي لم تثبت للآن ، والتي لا يمكن إثباتها
 إلا بردها أو اختزالها إلى مكافئ لها . والقاعدة ذات فائدة بصفة خاصة
 في النفي ، فبدونها وباستخدام القواعد التسع الأولى يمكننا إثبات قانون التناقض .

فيمكننا إثبات : إذا كانت $ق$ ، $ك$ قضيتين فإن $ق$ يلزم عنها $لا-ق$ ،
وأن $ق$ يلزم عنها $لاك$ ، مكافئة إلى $ك$ يلزم عنها $لاق$ ، ومكافئة أيضاً إلى
 $لا ق$ ، $ك$ ، وأن $ق$ يلزم عنها $ك$ يلزم عنها $لاك$ ، يلزم عنها $لاك$ يلزم عنها
 $لاق$ ، وأن $ق$ يلزم عنها أن $لا ق$ يلزم عنها $ق$ ، وأن $لاق$ تكافئ $ق$
يلزم عنها $لاق$ ، وأن $ق$ يلزم عنها $لاك$ ، تكافئ $لا-لاق$ يلزم عنها $لاك$ ،
ولكن بدون قاعدة الاختزال أو ما يعادلها لا يمكننا إثبات (إلى حد علمي على
الأقل) أن $ق$ أو $لاق$ يلزم أن تكون صحيحة (قانون الثالث المرفوع) ، وأن
أية قضية تكافئ سلب قضية أخرى ، وأن نفي $لا-لاق$ يلزم عنها $ق$ ،
وأن $لاق$ يلزم عنها $لاك$ يلزم عنها أن $ق$ يلزم عنها $ك$ ، وأن $لاق$ يلزم
عنها $ق$ يلزم عنها $ق$ ، أو أن $ق$ يلزم عنها $ك$ يلزم عنها $ك$ أو $لاق$.
وكل من هذه القروض يكافئ قاعدة الاختزال ويمكن أن تحل محلها . وبعض
هذه القروض وبخاصة قاعدة الثالث المرفوع وسلب السلب يبدو أنها أكثر
وضوحاً في ذاتها . ولكن عند ما نأتي إلى تعريف الانفصال والسلب بعبارة اللزوم
سنرى أن هذه البساطة السطحية تختفي وأن قاعدة الاختزال — على الأقل
لأغراض صورية — أبسط من كل بدائلها . ولهذا السبب فقد أقيمت عليها بين
مقدماتي مفضلاً إياها على كثير من القضايا العادية والبادية الواضوح في ظاهرها .

١٩ — ويعرف الانفصال أو الجمع المنطقي كما يأتي « $ق$ أو $ك$ » تكافئ
 $ق$ يلزم عنها « $ك$ يلزم عنها $ك$ » . ومن السهل أن نقنع بهذا التكافؤ إذا تذكرنا
أن كل قضية كاذبة يلزم عنها كل قضية أخرى لأنه إذا كانت $ق$ كاذبة
فإن $ق$ يلزم عنها $ك$ ، وإذن « إذا كانت $ق$ يلزم عنها $ك$ » يلزم عنها $ك$ ترتب
على ذلك أن $ك$ صادقة . ولكن هذه الحججة تستخدم مرة أخرى قواعد لم تثبت
للآن وقد وضعت لمجرد توضيح التعريف بالترتيب ، ومن هذا التعريف وبواسطة
قاعدة الاختزال يمكننا أن نثبت أن « $ق$ أول » تكافئ « $ك$ أو $ق$ » . وهناك
بدل لهذا التعريف مشتق مما سبق وهو « أي قضية تلزم عن $ق$ وتلزم عن $ك$
فهي صادقة » أو في صيغة أخرى « $ق$ تلزم عنها ل ، $ك$ يلزم عنها ل معا يلزم

عنهما ل مهما كانت ل . ومن هذا نسير نحو تعريف السلب : لاق تكافؤ الحكم بأن و يلزم عنها جميع القضايا أى أن « س يلزم عنها س » يلزم عنها « و يلزم عنها س » مهما كانت س . ومن هذه النقطة نستطيع أن نثبت قوانين التناقض ، والثالث المرفوع ، وسلب السلب كما نستطيع أن نضع جميع الخواص الصورية للضرب والجمع المنطقيين وقوانين الترابط ، وتبادل الحدود ، وتبادل الأطراف ، وبذلك يكون منطق القضايا كاملاً .

وقد يعترض الفلاسفة على التعريف السابق والسلب بحجة أننا نعنى بهذه الأفكار شيئاً آخر جد مختلف عما يدل عليه التعريف ، وأن المكافئات الواردة فى التعاريف هى فى الواقع حقيقة الأمر قضايا تدل على معنى وليست مجرد إشارات إلى الطريقة التى مستخدم فيها الرموز . وهذا الاعتراض فى رأى له ما يبرره لو أننا ادعينا أن الكلام السابق هو تحليل فلسفى حقيقى للموضوع . ولكن إذا كان المقصود هو استيفاء الشكل ، فإن كل تكافؤ تظهر فى أحد طرفيه فكرة ولا تظهر فى الطرف الآخر يمكن استخدامه كتعريف ، وأن ميزة أن نضع أمام أعيننا بناء صورياً محكماً هو أنه يقدم المادة التى سيستخدمها التحليل الفلسفى فى شكل أكثر تحديداً مما لو كان الأمر غير ذلك . ومن أجل ذلك فسنعرجُ نقد طريقة المنطق الصورى حتى نفرغ من هذه العجالة القصيرة .

ب - الحساب التحليلى للفصول

٢٠ - إن عدد القضايا الأولية الجديدة فى هذا الحساب التحليلى أقل كثيراً - وتكنى قضيتان على ما يبدو - ولكن الصعوبات أكثر فى عرض الأفكار الكامنة فى الرمزية عرضاً يستخدم طريقة غير رمزية . وستؤجل هذه الصعوبات كلما أمكن ذلك إلى فصول تالية ، أما الآن فسأجهد أن أعرض الموضوع عرضاً بسيطاً لا التواء فيه بقدر الإمكان .

ويمكن أن نبني الحساب التحليلى للفصول على اعتبار أن فكرة الفصل

أساسية ، وكذلك فكرة علاقة فرد في فصل بالفصل ذاته . وقد اتبع الأستاذ « بيانو » هذه الطريقة ، وهي تفضل من الناحية الفلسفية ، تلك الطريقة الأخرى التي وجدت أنها أطوع من الناحية الصورية وفي هذا المنهج سنظل نعتبر العلاقة (وسنرمز لهذه العلاقة بالرمز ϵ على طريقة بيانو) بين الفرد والفصل الذي ينتمي إليه أساسية ، أى العلاقة بين سقراط والجنس البشرى والتي نعبر عنها بقولنا سقراط إنسان ، وبالإضافة إلى هذا سنسلم بفكرة دالة القضية وبفكرة مثل على أنهما مما لا يمكن تعريفهما . وهذه هي الأفكار الثلاثة التي تميز الحساب التحليلي للفصول . وسنأتى على توضيح كل منها .

٢١ - كان « بيانو » أول من أصر على التمييز بين ϵ ، والعلاقة بين الكل والجزء بين الفصول ، وهذا أمر عظيم الفائدة في البناء الفنى بأجمعه وفي جميع التطبيقات الرياضية . فقد اختلطت العلاقتان في النظرية المدرسية للقياس وفي كل منطق رمزى سابق ، اللهم إلا في أعمال « فريج » والفرق هو كالفرق بين علاقة الفرد بالنوع وعلاقة النوع بالجنس ، أو كالفرق بين علاقة سقراط لفصل الإغريق وعلاقة الإغريق بالناس . وسأتوسع في طبيعة هذا الفرق من الناحية الفلسفية عند ما أحلل تحليلاً دقيقاً طبيعة الفصول . ويكفى الآن أن نعرف أن العلاقة بين الكل والجزء علاقة متعددة ، في حين أن ϵ ليست كذلك . ومثال ذلك : سقراط إنسان ، والناس فصل ، أما سقراط فليس فصلاً . ويجب أن نميز بين الفصل وبين فصل التصور أو المحمول الذي يجب أن يعرف به ، بمعنى أن الناس فصل ، ولكن الإنسان هو فصل التصور . ويجب اعتبار العلاقة ϵ قائمة بين سقراط والناس مجتمعين لا بين سقراط والإنسان . وسنرجع إلى الكلام عن هذا في الباب السادس . ويذهب « بيانو » إلى أنه يمكننا التعبير عن جميع دوال القضايا التي تحتوى على متغير واحد على الصورة « s هي a » حيث a فصل ثابت ، ولكننا سنجد ما يوجب الشك في وجهة النظر هذه .

٢٢ - والفكرة الأساسية التالية هي فكرة دالة القضية . ودوال القضايا تظهر في الحساب التحليلي للقضايا ، ولكن كل واحدة منها تعرف حينئذ عند ما

يحين استخدامها . ولذلك لا نحتاج هناك إلى المعنى العام ، وهو الذى نحتاج إليه صراحة عند الكلام على الحساب التحليلي للفصول . ولا يحتاج « بيانو » إلى هذا المعنى العام نظراً لتسليمه بأن الصورة « س هـ ١ » صورة عامة للمتغير الواحد ، وأنه من المستطاع تعميم هذه الصورة إلى أكثر من متغير واحد . فيجب أن نستبعد ما سلم به بيانو وندخل فكرة دالة القضية . ونستطيع أن نفسر — ولكننا لا نعرف — هذه الفكرة بما يأتي : Φ س دالة قضية ، إذا كانت لكل قيمة من قيم س ، Φ س قضية تتعين إذا تعينت س . ولذلك فإن « س إنسان » دالة قضية . وفي أى قضية مهما تعقدت — بحيث لا تحتوى على متغيرات حقيقية — يمكننا أن نتخيل أن أحد الحدود — غير الأفعال والصفات — قد وضع مكانه حد آخر . فبدلاً من « سقراط إنسان » يمكننا أن نضع « أفلاطون إنسان » ، « العدد ٢ إنسان » وهكذا . وبذلك نحصل على قضايا متتالية كلها متفقة إلا في الحد الواحد المتغير . فإذا وضعنا س بدلاً من الحد المتغير لكانت « س إنسان » تعبر عن نوع هذه القضايا كلها . ودالة القضية بصفة عامة قد تكون صادقة لبعض قيم المتغير وكاذبة لبعض القيم الأخرى . والحالات التى تكون فيها دالة القضية صادقة لجميع قيم المتغير هي إلى حد علمي الحالات التى تعبر عن اللزوم مثل قولك « س إنسان يلزم عنها س فان » ولكنى لا أجد سبباً أولاً إلى القول بأنه لا توجد دوال قضايا أخرى صادقة لجميع قيم المتغير .

٢٣ — وهذا يصل بنا إلى فكرة مثل : ققيم س التى تجعل دالة قضية س صادقة هي كجذور المعادلة — والواقع أن هذه الأخيرة حالة خاصة من الأولى — ونبحث جميع قيم س التى هي مثل أن تكون Φ (س) صادقة ، وهذه القيم بصفة عامة تكون فصلاً ، وفي الواقع يمكن تعريف الفصل بأنه جميع الحدود التى تحقق دالة قضية ما . وهذا النص يحتاج إلى بعض التحديد ، ولو أنى لم أستطع الكشف بالضبط عن ماهية هذا التحديد ، وهذا ناتج من تناقض معين سأبحثه بالتفصيل في مرحلة تالية (الباب العاشر) — والأسباب التى تحملنا على تعريف الفصل بهذه الطريقة هي أننا محتاجون إلى أن نهيء لفكرة الفصل

الصفري وهو ما يمنعنا من أن نعرف الفصل بأنه الحد الذي لحدود أخرى معه العلاقة ϵ ، وأنا نرغب أن يكون في مكتنتنا تعريف الفصول بواسطة العلاقات أى أن جميع الحدود التي لها مع حدود أخرى العلاقة ϵ تكون فصلا . وهذه الحالات تحتاج إلى دوال قضايا معقدة بعض الشيء .

٢٤ - وبالنسبة لهذه المعاني الثلاث الأساسية نحتاج إلى قضيتين . وتنص الأولى على أنه إذا كانت s داخلية في الحدود التي تحقق دالة قضية ϕ s كانت ϕ s صادقة . وتنص الثانية على أنه إذا كانت ϕ s ، ψ s قضيتين متكافئتين لجميع قيم s ، كان فصل السينات الذي هو بحيث تكون $\phi^{(1)}$ s صحيحة مطابقاً لفصل السينات الذي هو بحيث تكون ψ s صحيحة . ونعرف التطابق الحاصل هنا بما يأتي : s تطابق s إذا كانت s داخلية في كل فصل تنتمي إليه s . وفي عبارة أخرى إذا كانت « s هي f » يلزم عنها أن « s هي w » لجميع قيم w . وبما تجدر ملاحظته أن القضية الأولية ذاتها تميل إلى تحديد وجهة النظر إلى الفصول ، فليس حتماً أن يتطابق فصلا تصور إذا تطابقت ماصداقهما . فالإنسان وذو الرجلين وعاري الريش ليسا متطابقين بأي حال ، ولا كذلك العدد الزوجي الأول والعدد الصحيح الواقع بين ١ ، ٣ فهذه فصول تصورات . وإذا أردنا أن تكون بديهيتنا صحيحة فلا ينبغي أن ننصرف إلى هذه عند ما نتكلم عن الفصول بل ينبغي أن تكون عنايتنا بالمجموعات الفعلية للحدود ، لا بالتصور الدال على هذه المجموعة ، وهذا أساسى للغاية من الناحية الرياضية . نخذ مثلاً مسألة تعيين عدد التوافق التي يمكن تكوينها من مجموعة معلومة من الحدود بأخذ أى عدد منها في كل مرة ، أى عدد الفصول الداخلة في فصل معلوم . فإذا كان للفصول المختلفة الماصداقات ذاتها لأصبحت هذه المسألة غير معينة بالمرّة . ولا شك أن الاستعمال المألوف هو أن الفصل يحدد

(١) «بحيث تكون» هي الفكرة التي عبرنا عنها بقولنا مثل ، والاصطلاح بالانجليزية هو such that والمقصود أن العبارة الرمزية حين نريد أن نحققها في الواقع أى أن تكون وجودية وهناك فرق بين القضية الكلامية sentential ، وبين القضية الوجودية existential (المترجم)

تماماً عند ما تعرف جميع حدوده . ويظهر من هذا أن وجهة النظر الماصدية هي بشكل ما وجهة نظر أساسية للمنطق الرمزي والرياضيات . والبديهية السابقة تعبر عن الحاجة إلى هذه الفكرة ، ولكننا لا نستخدم البديهية ذاتها إلا عند الكلام عن الحساب ، أو على الأقل لا نحتاج إليها إذا أردنا التمييز بين تساوى الفصول المبني على الاستغراق المتبادل وبين تساوى الفصول المبني على تطابق الأفراد ، فالأمران مختلفان جداً من الناحية الصورية . فالأولى قد أتينا على تعريفها ، أما تساوى ا ، ب فيعرف بتكافؤ « س هي ا » ، « س هي ب » لجميع قيم س .

٢٥ - وأغلب قضايا الحساب التحليل للفصول يمكن استنباطها بسهولة من قضايا الحساب التحليل للقضايا . فحاصل الضرب المنطقي للفصلين ا ، ب أو الجزء المشترك بينهما هو فصل السينات التي يكون لها حاصل الضرب المنطقي للقضيتين « س هي ا » ، « س هي ب » صادقا ، وبالمثل يمكن تعريف حاصل الجمع المنطقي لفصلين (ا أو ب) وسلب الفصل (لا - ا) ومن حاصل الضرب والجمع المنطقيين لفصل فصول تدخل فكرة جديدة . فإذا كانت م فصل فصول فإن حاصل ضربها المنطقي هو فصل الحدود التي تنتمي إلى كل فصل من فصول م ، أي فصل الحدود س التي هي مثل « و هي م » يلزم عنها « س هي و » لجميع قيم و . أما حاصل الجمع المنطقي فهو الفصل المنطوي في كل فصل داخل في كل فصل من فصول ك أي فصل الحدود س من مثل : إذا كانت « و هي م » يلزم عنها أن « و داخل في الفصل ح » لجميع قيم و فإنه لجميع قيم ح تكون س هي ح . وتقول إن الفصل ا داخل في الفصل ب إذا كانت « س هي ا » يلزم عنها أن « س هي ب » لجميع قيم س . وبالطريقة السابقة يمكن تعريف حاصل الضرب وحاصل الجمع المنطقيين لفصل من القضايا . ومن الأفكار الهامة أيضاً فكرة « وجود » الفصل ، وهي لفظة يجب أن يفهم منها ما يفهم عادة بالوجود في الفلسفة . فالفصل يقال إنه موجود إذا كان له حد واحد على الأقل ، أما التعريف الصوري فهو كما يأتي : ا فصل موجود عند ما

وعند ما فقط تكون أى قضية صادقة بشرط «س» هى «ا» يلزم عنها دائماً . وينبغى أن يكون مفهوماً أن القضية المستلزمة يجب أن تكون قضية حقة لا دالة قضية بالنسبة إلى «س» ، والفصل «ا» يكون موجوداً إذا كان حاصل الجمع المنطقي لجميع القضايا التى من النوع «س» هى «ا» صادقة ، أى عند ما لا تكون جميع هذه القضايا كاذبة . ومن المهم أن نفهم بوضوح الكيفية التى يمكن بها الحصول على قضايا الحساب التحليلي للفصول من قضايا الحساب التحليلي للقضايا . خذ القياس الآتى مثلاً :

«ف» يلزم عنها «ك» ، و«ك» يلزم عنها «س» ، يلزم عنها «و» ، يلزم عنها «س»
 وضع «س» هى «ا» ، «س» هى «ب» ، «س» هى «ح» بدلا من «و» ، «ك» ، «س»
 حيث «س» تأخذ قيمة معينة ليس من المهم أن نقرر ما هى هذه القيمة .
 فلإننا نرى أنه إذا كان لقيمة «س» هذه : «س» هى «ا» يلزم عنها أن تكون «س»
 هى «ب» ، وأن «س» هى «ب» يلزم عنها أن تكون «س» هى «ح» ، فإن «س» هى «ا» يلزم
 عنها أن تكون «س» هى «ح» . ولما كانت قيمة «س» غير ذات موضوع أمكن تغيير
 «س» فنجد أنه إذا كانت «ا» داخلية فى «ب» ، وكانت «ب» داخلية فى «ح» ، فإن «ا» تكون
 داخلية فى «ح» ؛ وهذا هو فصل القياس . وإنما ينبغى أن نكون على جانب عظيم
 من الحذر فى استخدام هذه الطريقة إذا أردنا أن نتجح فى الابتعاد عن مواطن
 الزلل . ولعله من المفيد فى هذه المناسبة أن نبحث اختلاف وجهات النظر الذى
 قام بين «شريدلر» و«ماكول» . فشريدلر يقول إنه إذا كانت «و» ، «ك» ، «س»
 قضايا فإن «و» «ك» يلزم عنها «س» ، تكافئ الانفصال «و» يلزم عنها «س» ، أو
 «ك» يلزم عنها «س» . ويسلم «ماكول» بأن الانفصال يلزم عنه القضية الأخرى ،
 ولكنه ينكر اللزوم العكسى . والسبب فى اختلاف وجهات النظر هو أن
 «شريدلر» يتكلم عن القضايا واللزوم المادى ، بينما يتكلم «ماكول» عن دوال القضايا
 واللزوم الصورى . ويمكن توضيح صدق القاعدة السابقة بالنسبة للقضايا بالطريقة
 التالية . إذا كانت «و» «ك» يلزم عنها «س» فإنه لو كانت «و» أو «ك» كاذبة فإن
 الكاذبة منهما يلزم عنها «س» ، لأن القضية الكاذبة يلزم عنها جميع القضايا .

أما إذا كانت كل من ϕ ، ψ ، χ صادقة ، فإن $\phi \vee \psi$ تكون صادقة ، وعندئذ تكون ψ صادقة وفي هذه الحالة $\phi \vee \psi$ يلزم عنها χ ، و $\phi \vee \psi$ يلزم عنها χ ، لأن القضايا الصادقة تلزم عن كل قضية . ففي أى حالة فإن واحدة على الأقل من القضيتين ϕ ، ψ ، χ يلزم عنها χ (هذا ليس إثباتاً بل توضيحاً) ويعترض «ماكول» فيقول : نفرض أن ϕ ، ψ متناقضتان بالتبادل ، وأن χ هي القضية الصفر فتكون $\phi \vee \psi$ يلزم عنها χ في حين أن $\phi \vee \psi$ لا يلزم عنها χ وكذلك ψ لا يلزم عنها χ . فنحن هنا نتكلم عن دوال القضايا وعن اللزوم الصورى فيقال إن دالة قضية صفر عند ما تكون باطلة لجميع قيم ϕ . ويسمى فصل السينات الذى يحقق الدالة بالفصل الصفرى، من حيث هو فى الواقع فصل بلا حدود وسنرمز للفصل أو الدالة بالرمز Λ على طريقة بيانو ، فإذا وضعنا Λ بدلا من ϕ ، ووضعنا ϕ بدلا من ψ ، ووضعنا Λ بدلا من χ حيث $\phi \vee \psi$ أية دالة قضية ، فإن $\phi \vee \psi$ باطلة لجميع قيم ϕ . وعلى ذلك يلزم عنها Λ . ولكن الواقع أن $\phi \vee \psi$ ليست دائماً باطلة ولا Λ دائماً باطلة ، ولا يمكن لأيهما أن يلزم عنها إذن Λ دائماً ، وعلى ذلك فالصيغة السابقة يمكن تفسيرها تفسيراً صحيحاً فى حالة الحساب التحليل للقضايا فقط ، ولكنها غير صحيحة فى الحساب التحليل للفصول . ويمكن توضيح ذلك بسهولة بما يأتى :

لتكن ϕ س ، ψ (س) ، χ س ثلاث دوال قضايا ، فيكون $\phi \vee \psi$. ψ (س) يلزم عنها لجميع قيم ϕ س أن $\phi \vee \psi$ يلزم عنها χ (س) أو أن ψ س يلزم عنها χ س لجميع قيم ϕ وهذا الانفصال هو ما سأسميه الانفصال المتغير تمييزاً له عن الانفصال الثابت . ففي الحالة الأولى هناك حالات يكون فيها أحد الاحتمالين صادقا ، وهناك حالات أخرى يكون فيها الاحتمال الآخر صادقا أما فى حالة الانفصال الثابت فإن أحد الاحتمالين (ولو أننا لم نقرر أيهما) صادق على الدوام، وعند ما تكون هناك اتصالات بالنسبة إلى دوال القضايا فإنه يمكن تحويلها إلى أحكام فى الحساب التحليل للفصول ، وذلك فقط فى الحالات التى يكون فيها الانفصال ثابتاً . وهذا أمر هام فى حد ذاته وفيد فى دلالته . ويمكن

النظر إلى هذا الموسوع بطريقة أخرى : في قولنا إذا كانت Φ س . Ψ س يلزم عنها X س فإنه إما أن Φ س يلزم عنها X س ، أو Ψ س يلزم عنها X س . والازوم المرموز له « إذا كانت » و « فإنه » لزوم صوري ، بينما الزومان الفرعيان ما ديان . ولذلك فإن الزومين الفرعيين لا يؤديان إلى دخول فصل في آخر ، وهو ما لا يتبع إلا عن الزوم الصوري .

والقوانين الصورية للجمع والضرب والتكرار والسلب هي بعينها للفصول والقضايا . وينص قانون التكرار على أنه لا يتغير شيء عند ما نضيف فصلاً إلى نفسه أو نضربه في نفسه ، وبالمثل بالنسبة للقضية . والجديد في الحساب التحليلي للفصول هو فكرة الفصل الصفرى ، أو الفصل الذى لا حدود له . ويمكن تعريف هذا بأنه فصل الحدود التى تدخل في كل فصل ، أو بأنه الفصل الداخلى في كل فصل ، أو بأنه الفصل A الذى هو مثل أن يجعل دالة القضية « س هي A » كاذبة . جميع قيم س ، أو بأنه فصل السينات التى تحقق أى دالة قضايا Φ س بشرط أن تكون كاذبة لجميع قيم س . ومن السهل أن نرى أن جميع هذه التعاريف متكافئة .

٢٦ — وهناك بعض النقط التى تنشأ بالنسبة إلى نظرية التطابق . فقد عرفنا سابقين حدين عند ما يكون الثانى داخلاً في كل فصل يدخل فيه الأول . ومن السهل أن نرى أن هذا التعريف مماثل ، وأن التطابق متعدد ومتعكس (أى أنه إذا كان س ، ص متطابقين ، وكان ص ، ط متطابقين فإن س ، ط متطابقين ، وهما كانت س فإن س تطابق س) . ويعرف الاختلاف بأنه سلب التطابق . فإذا كانت س أى حد فمن اللازم أن تفرق بين س وبين الفصل الذى حله الوحيد هو س . ويمكن تعريف هذا بأنه فصل الحدود التى تطابق س . ولقد اكتشف « بيانو » ضرورة هذه التفرقة التى تنشأ أصلاً من الاعتبارات الشكلية البحتة ، وسنعود للكلام عنها فيما بعد . وعلى ذلك ففصل الأعداد الأولية الزوجية لا ينبغى أن يؤخذ مطابقاً للعدد ٢ ، وفصل الأعداد التى هي مجموع ١ ، ٢ لا ينبغى أن يؤخذ مطابقاً للعدد ٣ . وستكلم في الباب السادس عن الفرق من الناحية الفلسفية .

ج - الحساب التحليلي للعلاقات

٢٧ - دراسة الحساب التحليلي للعلاقات أحدثت من دراسة موضوع الحساب التحليلي للفصول . وكان « بيرس »^(١) Pierce أول من تقدم الموضوع على يديه، ولو أننا نجد إشارات طفيفة إليه في أعمال « ديمورجان »^(٢) De Morgan. وإن نظرة دقيقة في الاستدلال الرياضي - كما سيتضح لنا خلال هذا المؤلف - لتكشف عن أن أنواع العلاقات هي المادة التي نبحث فيها، وإن حجب سوء التعبير هذه الحقيقة . ومن ذلك يتضح أن منطق العلاقات أوثق صلة بالرياضة من منطق الفصول أو القضايا، وأنه لا يمكن التعبير عن الحقائق الرياضية تعبيراً صحيحاً من الناحية النظرية إلا باستخدام منطق العلاقات . ولقد أدرك كل من « بيرس » و« شريدلر » أهمية هذا الموضوع ، وإن تكن طرقهما مع الأسف لم تُبَيِّنْ على نهج « بيانو »، بل بنيت مع بعض التعديل على المنطق الرمزي القديم متجهين في ذلك نهج « بول » فجاءت طرائقهما صعبة معقدة ، واستحالت معها عملياً أكثر التطبيقات التي كان ينبغي إجرائها . وفوق عيوب المنطق الرمزي القديم فقد عانت تلك الطريقة نقصاً فنياً - ولسنا نبحث الآن فيما إذا كان هذا من الوجهة الفلسفية أو لا - ويرجع هذا النقص إلى أن « بيرس » و« شريدلر » يعتبران العلاقة على أنها أساساً فصل أزواج ، وهذا يقتضى استخدام قوانين معقدة للجمع إذا أردنا البحث في العلاقات الفردية . ويحتمل أن تكون وجهة النظر هذه نتيجة خطأ فلسفي ، فقد جرت العادة دائماً على اعتبار قضايا العلاقات أقل في إطلاقتها من فصول القضايا - (أو القضايا الحتمية التي تختلط عادة

(١) انظر درجه خاص مقالاته عن جبر المنطق في American Journal of Mathematics Vols III and IV وقد عالج شريدلر في إطناب طرائق بيرس - انظر المرجع السابق - المجلد الثالث .

(٢) انظر Cam. Phil., Trans. Vol. X. "On the Syllogism, No. IV, and on the Logic of Relations". GF. ib. Vol. IX, p. 104; also his Formal Logic (London 1847), p. 50.

بفصل القضايا) وقد أدى هذا الميل إلى اعتبار العلاقات نوعاً من الفصول .
وكيفما كان الأمر فقد توصلت إلى رأى مخالف عن العلاقات ساعدنى في
الوصول إليه صديق «مور»^(١) الذى يعتق الرأى الفلسفى المخالف . وسواء أكانت
الطريقة الجديدة أصح من الناحية الفلسفية أم لا فإن الثابت أنها أكثر ملاممة
وأفضى سلاحاً كأداة للكشف فى الرياضة الفعلية^(٢) .

٢٨- وإذا كانت ع ترمز للعلاقة فإن س ع ص تعبر عن دالة القضية
أى «س لها العلاقة ع مع ص» . ونحتاج إلى قضية أولية ، أى لا يمكن إثباتها ،
مضمونها أن س ، ص قذية لجميع قيم س ، ص ، وبعد ذلك يتحتم علينا
النظر فى الفصول الآتية: فصل الحدود التى لها العلاقة ع مع حلاً أو آخر ،
ونسمى هذا فصل المتعلقات بها بالنسبة إلى ع وفصل الحدود التى لحد أو آخر
العلاقة ع معها ؛ ونسمى هذا بفصل المتعلقات . فإذا كانت ع تعبر عن الأبوة
مثلاً فإن المتعلق به هو الآباء والمتعلق هو الأبناء . كذلك علينا أن ننظر فيما
يقابل تلك من فصول بالنسبة لحدود خاءة أو لفصول من حدود ، ومثال ذلك
قولك أولاد كيت وكيت ، أو أولاد أهل القاهرة . وإن نظرنا هذه إلى العلاقة
من جهة المفهوم تودى إلى أنه قد يكون للعلاقتين نفس الماصدق دون أن تكونا
منطقتين . ويقال إن علاقتين ع ، ع متساويتان أو متكافئتان أو أن لهما
نفس الماصدق عندما تكون س ع ص يلزم عنها وتلزم عن س ع ص لجميع
قيم س ، ص . ولكننا لانحتاج هنا إلى قضية أولية كما احتجنا لها فى حالة الفصول
كى نصل إلى علاقة محددة عندما يكون الماصدق محدداً ، ويمكننا أن نضع
مكان العلاقة ع حاصل الجمع أو الضرب المنطقى لفصل العلاقات الذى يكافئ ع
أى بتقرير بعض أو كل هذه العلاقات ، ويكون هذا مطابقاً لحاصل الضرب
أو الجمع المنطقى لفصل العلاقات الذى يكافئ ع إذا كانت ع تكافئ ع .
ونستخدم هنا تطابق فصلين ، وهو ما ينتج من القضية الأولية عن تطابق

(١) انظر مقالته « طبيعة الحكم » فى مجلة Mind, N.S. No. 30.

(٢) انظر مقالتي فى مجلة R. d. M. Vol. No. 2 والأعداد التالية .

الفصول ، لنصل إلى تطابق علاقتين ؛ وهي طريقة مّا كان يمكن تطبيقها على
الفصول ذاتها دون الدوران في حلقة مفرغة .

والقضية الأولى بالنسبة للعلاقات هي أن كل علاقة لها عكس ، أى إذا
كانت ع علاقة مّا فإنه توجد علاقة عـ بحيث أن عـ عـ تكافئ عـ عـ صـ
لجميع قيم صـ ، صـ . وسنرمز لعكس ع بالرمز عـ على طريقة شريدلر ،
فالعلاقات أكبر وأصغر ، وقبل وبعد ، التى تلزم عنها وتلزم عن ، هي علاقات
متعاكسة بالتبادل . وقد يكون العكس هو نفس العلاقة الأصلية كالحال في
التطابق والاختلاف والتساوى واللاتساوى ، وتسمى مثل هذه العلاقات ممتثلة .
أما إذا كان العكس غير متفق مع العلاقة الأصلية ، كالحال بين أكبر وأصغر ،
فإن العلاقة تسمى لاممتثلة ، وسأسميها غير ممتثلة فيما بين ذلك من حالات .

وأهم القضايا الأولى في هذا الموضوع هي التى تنص على أنه توجد علاقة
بين أى حدين لا تقوم بين أى حدين آخرين . وهذا يشبه القاعدة التى تقول
إن أى حد هو الفرد الوحيد في فصل ما . ولكن بينما أمكن إثبات هذا بالنظر
إلى الفصول من جهة الماصدق ، فإن هذا المبدأ إلى حد علمي مما لا يمكن
إثباته . وهنا تظهر فائدة النظر في العلاقات من جهة الماصدق ولكن هناك
اعتبارات أخرى ترجح هذه المزية . وعند النظر إلى العلاقات من جهة المفهوم
قد يبدو من المحتمل ألا تكون القاعدة المذكورة صحيحة ألينة . ولكننا بصفة عامة
سنسلم بأنه إذا أخذنا أى زوجين من الحدود فقد تكون هناك دالة قضية صادقة
بالنسبة لهذين الحدين ، ولكنها كاذبة بالنسبة إلى زوجين آخرين من الحدود .
فإذا سلمنا بهذا فإنه يمكن استنباط القاعدة السابقة باعتبار حاصل الضرب
المنطقي لجميع العلاقات التى تقوم بين الزوج الأول من الحدود ، وبذلك يمكن
أن نضع بدلا من القاعدة السابقة ، القاعدة الآتية التى تكافئها : إذا كانت
صـ عـ صـ تستلزم صـ عـ صـ مهما كانت عـ ما دامت تدل على علاقة ،
فإن صـ تطابق صـ ، صـ تطابق صـ . ولكن هذا يدخلنا في صعوبة منطقية لم
تعرض لنا للآن ، وهي التغير في المجال المقيد ، لأنه ما لم تكن ع تدل على

علاقة ، فإن س ع ص ليست قضية على الإطلاق صادقة أو كاذبة ؛ ولذلك يبدو أن ع فيا يظهر لا يمكن أن تأخذ «جميع» القيم ، ولكنها تأخذ فقط القيم التي هي علاقات . وسأعود إلى بحث هذه النقطة مستقبلاً .

٢٩- ومن القروض الأخرى التي نحتاج إليها هي أن سلب العلاقة فهو علاقة ، وأن حاصل الضرب المنطقي لفصل من العلاقات (أى تقريرها جميعاً في آن واحد) فهو علاقة . كذلك «حاصل الضرب النسبي» لعلاقتين يجب أن يكون علاقة . ويعرف حاصل الضرب النسبي للعلاقتين ع ، ح بأنه العلاقة التي تقوم بين س ، ع كلما وجد حد ص يكون للحد س معه العلاقة ع ويكون له مع ع العلاقة ح . فثلاً علاقة الجدة عن الأم بالنسبة لحفيده هي حاصل الضرب النسبي للأب والأم . وعلاقة الجدة عن الأب لحفيدها هي حاصل الضرب النسبي للأم والأب . وعلاقة الجد للحفيد هي حاصل الضرب النسبي للوالد والوالدة . وحاصل الضرب النسبي ، كما يظهر من هذه الأمثلة ، ليس تبادلياً ولا ينخضع عادة لقانون التكرار . وحاصل الضرب النسبي فكرة ذات أهمية كبيرة . ولما كان لا ينخضع لقوانين التكرار فإنه يؤدي إلى قوى العلاقات . فربع العلاقة بين الوالد والطفل هي علاقة الجد بالحفيد وهكذا . وقد بحث «بيرس» «وشريدلر» أيضاً في حاصل الجمع النسبي للعلاقتين ع ، ح وهي العلاقة التي تقوم بين س ، ط إذا توفر الشرط الآتي : إذا كانت ص أى حد آخر فلما أن تكون س لها العلاقة ع مع ص أو تكون ص لها العلاقة ع مع ط . وهذه فكرة معقدة لم تسع لى فرصة استخدامها وقد أدخلت فقط للإبقاء على قاعدة الثنائية بين الجمع والضرب . وهذه القاعدة سحر فنى خاص عندما ننظر إلى الموضوع على أنه فرع مستقل من فروع الرياضة . ولكن عند النظر على ضوء الأصول الرياضية يصبح مبدأ الثنائية هذا عديم الأهمية من الناحية الفلسفية .

٣٠- ولا نحتاج في الرياضة ، إلى حد علمي ، إلا إلى قضيتين أوليتين

أخريين ، الأولى أن الزوم المادى علاقة ، والثانية أن ε (علاقة الحد

بالفصل الذى يتسمى إليه «علاقة»^(١) . وبعد ذلك يمكننا بناء جميع الرياضيات دون الحاجة إلى فروض أو مسلمات جديدة لا يمكن تعريفها . وهناك بعض قضايا في منطق العلاقات تستحق الذكر نظراً لأهميتها، ولاحتمال أن يتسرب الشك في إمكان إثباتها إثباتاً صورياً . فإذا كان و ، ف فصلين أيا كانا فإنه توجد علاقة ع بحيث يكون الحكم بها بين أى حدين س ، ص مكافئاً للحكم بأن س داخل في الفصل و وأن ص داخل في الفصل ف . وإذا كان و أى فصل غير صفري ، فهناك علاقة قائمة بينه وبين جميع حدوده ، وهى علاقة لا تقوم بين أى زوج آخر من الحدود . وإذا كانت ع أية علاقة ، وكان و أى فصل داخل في فصل المتعلقات بها بالنسبة ل ع فإنه توجد علاقة فصل المتعلقات بها هو الفصل و وهى تكافئ ع في ذلك الفصل ، وهذه العلاقة هى ذات العلاقة مثل ع حيثما تقوم ، ولكنها ذات ميدان أكثر تقييداً منها (ونستخدم هنا «الميدان» كمرادف لفصل المتعلق به) وسنبني الموضوع من الآن بناءً فنياً ، وسنبحث بعض الأنواع الخاصة من العلاقات ، وسينجم عن هذا فروع خاصة من الرياضيات .

د - المنطق الرمزي لبيانو

٣١- ولا كان الكثير من العجالة السابقة عن المنطق الرمزي ، هو من وحي «بيانو» ، فإنه من المرغوب فيه أن نبث أعماله بصراحة ، مبررين بالحجة النقاط التى نختلف رأيه فيها .

ونحن نتفق مع الأستاذ «بيانو»^(٢) فيما ذهب إليه من أن الأمر متروك لاختيارنا إلى حلما في اختيار معاني المنطق الرمزي التى نسلم بأنها لا تقبل

(١) هناك صعوبة فيما يختص بهذه القضية الأولية ذوقشت في بند ٥٣ ، ٩٤ فيما بعد .

(٢) E. g. F. 1901, p. 6; F. 1897, Part 1, pp. 62-3.

التعريف ، والقضايا التي نسلم بأنه لا تقبل الإثبات . ولكن من المهم أن تثبت جميع العلاقات المتبادلة بين معاني المنطق البسيطة ، وأن تفحص النتيجة المترتبة على اتخاذ أفكار متعددة على أنها غير قابلة للتعريف . وهنا يلزم أن ندرك أن التعريف في الرياضيات لا يعنى ، كالحال في الفلسفة ، تحليلاً للفكرة التي يراد تعريفها إلى أفكار أولية ، فهذه الطريقة لا تنطبق على كل حال إلا في حالة التصورات ، ومن الممكن في الرياضيات أن نعرف حدوداً ليست بتصورات^(١) . كذلك كثير من المعاني يعرفها المنطق الرمزي ولا يمكن تعريفها تعريفاً فلسفياً لأنها بسيطة وغير قابلة للتحليل . ويتكون التعريف الرياضي من الإشارة إلى علاقة ثابتة لحد ثابت ، وهي علاقة لا يمكن أن تقوم إلا مع حد واحد ، ويعرف هذا الحد حيثئذ بواسطة العلاقة الثابتة والحد الثابت . ويمكن توضيح وجه الخلاف بين هذا التعريف وبين التعريف الفلسفي بأن التعريف الرياضي لا يشير إلى الحد المقصود ، وأن النظرة الفلسفية وحدها هي التي تكشف عن هذا الحد من بين سائر الحدود ، ويرجع هذا إلى أن الحد يعرف بتصوير يدل عليه بدون لبس أو إيهام ، لا بذكر الحد المدلول عليه . أما ما نقصده بالدلالة ، وبالطرق المختلفة لهذه الدلالة فيجب أن يقبل على أنه من الأفكار الأولية في أى منطق رمزي^(٢) . وفي هذا يبدو أن الترتيب الذي اتبعناه ليس فيه مجال لأى اختيار .

٣٢- ولكي نجعل لكلامنا صفة محدودة سنفحص رأياً من آراء الأستاذ «بيانو» في الموضوع . ولقد عدل في كتاباته الأخيرة^(٣) عن محاولته أن تميز بوضوح بعض الآراء أو القضايا على أنها أولية ، ولعل هذا يرجع إلى إدراكه أن مثل هذا التمييز لا بد أن يكون اختيارياً . ولكن يبدو أن هذا التمييز نافع في زيادة التحديد ، وفي بيان أن مجموعة معينة من الآراء والقضايا الأولية كافية . ولا كان لأمر كذلك فلا ينبغي المدلول عن هذا التمييز ، بل يجب أن نقدم عليه بكافة

(١) انظر الباب الرابع .

(٢) انظر الباب الخامس .

(٣) F. 1901 and R. d. M. Vol. VIII, No. 1 (1900).

الطرق الممكنة . ومن أجل ذلك سأشرح فيما يلي أحد الآراء الأولى للأستاذ بيانو ، وذلك الذى نشر عام ١٨٩٧ .^(١)

والأفكار الأصلية التى يبدأ منها بيانو هى الآتية : الفصل ، علاقة الفرد بالفصل الذى هو عضو فيه ، فكرة الحد ، اللزوم الذى تجتوى فيه كلا القضيتين على المتغيرات ذاتها أى اللزوم الصورى ، إثبات قضيتين معاً ، فكرة التعريف ، سلب القضية . ومن هذه الأفكار بالإضافة إلى تقسيم القضية المركبة إلى أجزاء ، يزعم «بيانو» أنه يبنى كل المنطق الرمضى بواسطة بعض القضايا الأصلية . ولنفحص الآن هذا الاستنتاج بصفة عامة .

ونلاحظ بادئ ذى بدء أن فكرة الحكم الاقترانى بقيةيتين ، قد يبدو عند النظرة الأولى ، غير كاف لأن يؤخذ على أنه فكرة أصلية . ومع أن هذه الفكرة يمكن تعميمها خطوة خطوة إلى الحكم الاقترانى لأى عدد محدود من القضايا ، إلا أن هذا ليس هو كل ما نطلبه ، فنحن فى حاجة إلى ما يمكننا من أن نثبت فى آن واحد جميع قضايا الفصل الواحد سواء كانت محدودة أو غير محدودة . ومن الغريب أن الحكم الاقترانى لفصل من القضايا أسهل بكثير فى تعريفه من الحكم الاقترانى لقضيتين اثنتين . (انظر بند ٣٤ و ٣٥) . فإذا كانت *ك* فصلاً من القضايا فإن إثباتها الاقترانى هو الحكم بأن «*و* هى *ك*» يلزم عنها *و* . فإذا صح هذا ، صدقت جميع قضايا الفصل ، وإذا لم يصح ، فإن قضية واحدة على الأقل من قضايا الفصل يجب أن تكون كاذبة . ولقد رأينا كيف يمكن تعريف حاصل الضرب المنطقى لقضيتين بطريقة مصطنعة للغاية ، وكان من الممكن اعتبارها مما لا يمكن تعريفه لأن هذا التعريف لا يستخدم فى إثبات أية خاصة أخرى . ونلاحظ أيضاً أن «بيانو» قد جمع بين اللزوم الصورى واللزوم المادى فى فكرة أصلية واحدة ، بينما يجب أن تبقى منفصلتين .

٣٣ — ويبدأ «بيانو» قبل القضايا الأصلية ، ببعض التعاريف . (١) إذا

كانت | فصلا فإن قولك «س» ، ص هما ألفان «معناه أن «س» هي | ،
 «س» هي | . (٢) . إذا كان | ، ب فصلين فقولك «كل | هي ب» معناه
 «س» هي | يلزم عنها أن «س» هي ب . وإذا قبلنا فكرة اللزوم الصوري على أنها
 فكرة أصلية ، فلا اعتراض على هذا التعريف . ولكن قد نرى أن علاقة
 الاستغراق في الفصول أبسط من اللزوم الصوري ، وينبغي ألا تعرف بها . وهذه
 مسألة صعبة أرجئ الكلام عنها إلى مناسبة قادمة . واللزوم الصوري يبدو أنه
 الحكم بفصل كامل من اللزوم المادى ، وأن الإشكالات التي تعرض عند
 هذه النقطة ناشئة عن طبيعة المتغير ، وهي مسألة عمل «بيانو» كثيراً لإبراز أهميتها
 إلا أنه لم يوفها حقها من البحث والاعتبار . وفكرة القضية الواحدة المشتملة على
 متغير ، والتي تتضمن قضية أخرى من هذا القبيل يعتبرها «بيانو» فكرة أصلية
 مع أنها مركبة وينبغي إذن تحليلها إلى عناصرها . ومن هذا التحليل تنجم الحاجة
 إلى الكلام عن الحكم الاقتراني لفصل بأكمله من القضايا قبل تفسير قضية قولك
 «س» هي | يلزم عنها أن «س» هي ب . (٣) ونأتى الآن على تعريف عديم
 القيمة تماماً وقد عدل عنه ^(١) ، وهو تعريف قولك «مثل» فلفظ قبل إن السينات
 التي هي مثل أن «س» هي | تؤلف الفصل | . ولكن هذا إنما يعطينا معنى «مثل»
 عندما توضع قبل قضية من نوع القضية «س» هي | . وكثيراً ما نضطر إلى
 الكلام عن «س» تصح عليها قضية ماً عندما لا تكون هذه القضية من النوع
 «س» هي | . وفي اعتقاد «بيانو» (ولو أنه لا يضع ذلك على أنه بديهية) أن كل
 قضية لا تشتمل إلا على متغير واحد يمكن ردها إلى الصورة «س» هي | .^(٤)
 ولكننا سنرى (في الباب العاشر) أنه توجد على الأقل قضية واحدة لا يمكن
 ردها إلى هذه الصورة . وعلى كل حال فالفائدة الوحيدة لعبارة «مثل» هي
 أحداث هذا الرد الذي لا يمكن إذن افتراض إحداثه بدونها . فالواقع أن عبارة

(١) وذلك على أثر ما نقله «بادوا» Padoa في R. d. M. Vol. VI p. 112.

(٢) R. d. M. Vol. VII, No. 1, p. 25; F. 1901, p. 2 * 2, Prop. 4. o, Note.

« مثل » تشتمل على فكرة أصلية من الصعب عزلها عن الأفكار الأخرى .
ولكى ندرك معنى عبارة « مثل » ينبغي أن نلاحظ قبل كل شيء أن ما يسميه « يانغو » والرياضيون قضية واحدة شتملة على متغير واحد في الواقع ، إذا كان المتغير ظاهراً ، ما اجتمع من فصل معين من القضايا يتميز بشبات الصورة ، في حين أنه إذا كان المتغير حقيقياً ، وبحيث يكون الأمر عندئذ أمر دالة قضية فلا يكون لدينا قضية بالمره ، ولكن مجرد تمثيل تخطيطي عن « أية » قضية من نوع معين . فإذا أردنا مثلاً أن نعبر بالمتغير عن القضية القائلة بأن « مجموع زوايا المثلث يساوي قائمتين » قلنا : ليكن s مثلاً ، إذن مجموع زوايا s يساوي قائمتين . وهذا يعبر عن اتصال جميع القضايا التي نقول فيها عن أشياء معينة خاصة إنها لو كانت مثلثات فإن مجموع زواياها يساوي قائمتين . ولكن دالة القضية التي يكون فيها المتغير حقيقياً ، تمثل أى قضية من صورة خاصة ، ولا تمثل « جميع » هذه القضايا (انظر بنود ٥٩ — ٦٢) ولكل دالة قضية علاقة غير قابلة للتعريف تقوم بين القضايا والأشياء يمكن التعبير عنها بقولنا إن جميع القضايا لها ذات الصورة ، ولكن أشياء مختلفة تدخل في هذه القضايا . وهذا هو الذي تنشأ عنه دوال القضايا . فإذا كان لدينا مثلاً علاقة ثابتة وحد ثابت ، فإنه يوجد تناظر الواحد للواحد بين القضايا التي تقرر أن الحدود المختلفة لها العلاقة المذكورة مع الحد المذكور ، وبين مختلف الحدود التي تقع في هذه القضايا . وهذا هو المعنى الذي يلزم قبل أن نفهم معنى « مثل » . ولتكن s متغيراً تؤلف قيمه الفصل ١ ، ولتكن d (s) دالة واحدة القيمة للمتغير s ، ولتكن هذه قضية صادقة لجميع قيم s داخل الفصل ١ ، وكاذبة لجميع قيم s الأخرى . وإذن حدود ١ هي فصل الحدود التي هي مثل d (s) قضية صادقة . وهذا يفسر معنى « مثل » . ولكن ينبغي أن نتذكر أن مظهر قضية واحدة d (s) يحققها عدد من قيم s مظهر خداع ؛ لأن d (s) ليست قضية بالمره ، ولكنها دالة قضية . والشئ الأساسي هو علاقة مختلف القضايا من صورة معينة بمختلف الحدود الداخلة فيها كوضوعات أو قيم للمتغير . وهذه العلاقة

لازمة كذلك لتفسير دالة القضية « س » وكذلك لتفسير معنى العبارة « مثل » ولكنها في حد ذاتها أولية ولا يمكن تفسيرها . (٤) ونأتى الآن على تعريف حاصل الضرب المنطقي أو الجزء المشترك بين فصلين . فإذا كان ١ ، ب فصلين ، فإن جزءهما المشترك يتكون من فصل الحدود س مثل أن س هي ا و س هي ب . وهنا ، كما يقول « بادوا » ، يلزم أن يمتد معنى « مثل » إلى أبعد من الحالة التي تقرر فيها القضية للدخول تحت الفصل ، ذلك أنه لا يمكن إثبات أن الجزء المشترك فصل إلا بواسطة التعريف .

٣٤ - أما باقى التعاريف التى تسبق القضايا الأصلية فهى أقل أهمية ويمكن إغفالها . وبعض القضايا الأصلية يبدو أن معنى " فقط بالرمزية ولا بغير عن أية خاصية حقيقية للدلول تلك الرموز . والبعض الآخر على النقيض ذو أهمية منطقية عالية . (١) وأول بديهيات « بيانو » هى : « كل فصل يشتمل على نفسه » وهذا يساوى قولنا « كل قضية يلزم عنها نفسها » . وليس هناك من سبيل للاستغناء عن هذه الأولية التى تساوى قانون التطابق اللهم إلا بالطريقة التى استخدمناها آنفاً وهى استخدام الزوم الذاتى لتعريف القضايا . (٢) ثم لدينا بعد ذلك بديهية أن حاصل ضرب فصلين هو فصل . وكان ينبغى أن يكون نص هذه البديهية وكذلك نص تعريف حاصل الضرب المنطقي منصرفاً إلى فصل الفصول . لأنه عندما ينص فيها على فصلين اثنين فلا يمكن تعميمها إلى حاصل الضرب المنطقي لفصل الفصول إذا كان هذا الأخير غير متناه . وإذا اعتبرنا الفصل مما لا يمكن تعريفه كانت هذه بديهية حقيقية ولازمة جداً فى التفكير . ولكن قد يمكن تعميمها بعض الشيء بواسطة بديهية عن الحدود التى تحقق قضايا ذات صورة معينة . مثلاً : « الحدود التى لها علاقة واحدة أو أكثر مع حد أو عدة حدود معينة تؤلف فصلاً » . وقد تجنبنا هذه البديهية بالكلية فى قسم ب السابق باستخدام صورة أعم للبديهية فى تعريف الفصل . (٣) ثم نأتى بعد ذلك إلى بديهيتين هما فى الحقيقة واحدة ولا تظهران متميزتين إلا لأن « بيانو » يعرف الجزء

المشترك بين فصلين بدلا من الجزء المشترك بين فصل فصول . وتنص هاتان البديهيتان على أنه إذا كان A ، B فصلين فإن حاصل ضربهما المنطقي $A \wedge B$ داخل في A وداخل في B . وتبدو هاتان البديهيتان مختلفتين ، لأنه بحسب ما يظهر من الرمزية $A \wedge B$ قد تختلف عن A . وإنه لمن عيوب الرمزية أنها تعطى ترتيباً لحدود ليس لها ذاتها ترتيب ، أو على الأقل ليس لها ترتيب ذو أثر على الموضوع . ففي هذه الحالة إذا كان A فصل فصول فإن حاصل ضرب A المنطقي يتألف من جميع الحدود المتممة لكل فصل داخل في A . ويظهر جلياً من هذا التعريف أن ترتيب حدود A لا يدخل في الأمر . وعلى ذلك فإذا اشتمل A على فصلين اثنين فقط A_1 ، A_2 فسيان أن نمثل حاصل ضرب A المنطقي بالرمز $A_1 \wedge A_2$ أو بالرمز A ، لأن الترتيب موجود فقط في الرموز لا في مدلولاتها . ويجب ملاحظة أن البديهية التي تناظر هذا بالنسبة للقف يا هي أن الحكم الاقتراني لفصل من القضايا يلزم عنه أى قضية من قضايا الفصل . وربما كانت هذه أحسن صورة للبديهية . ومع أننا في غير حاجة إلى بديهية إلا أنه ينبغي أن نوجد وسيلة هنا أو في أى مكان آخر لربط الحالة التي تبدأ فيها من فصل فصول أو فصل قضايا أو علاقات ، بالحالة التي فيها ينشأ الفصل من إحصاء حدوده . فمثلا مع أن الترتيب لا يدخل في حاصل ضرب فصل من القضايا ، فإنه يوجد ترتيب في حاصل ضرب قضيتين معينتين A ، B ويصبح النص على أن $A \wedge B$ تساوى A من النصوص ذات المعنى . ولكن هذا يمكن إثباته بواسطة البديهيات التي بدأنا بها الحساب التحليلي للقضايا (بند ١٨) ونلاحظ أن هذا البرهان سابق لبرهان أن الفصل الذي حدوده A ، B مطابق للفصل الذي حدوده A ، B . (٤) وعندنا بعد ذلك صورتان من القياس كلاهما قضية أولية . وتنص الأولى على أنه إذا كان A ، B ، C فصولا وكان A داخلا في B ، وكان B هي A ، فإن B هي B . وتنص الثانية على أنه إذا كان A ، B ، C فصولا وكان A داخلا في B ، B داخلا في C ، كان

ا داخلًا في ح. ولأنه لمن أهم مزايا «بيانو» أن تميز بوضوح بين علاقة الفرد بالفصل وبين علاقة التداخل بين الفصول. والفرق أساسى للغاية : فالعلاقة الأولى أبسط وهى أهم العلاقات ، أما الثانية فعلاقة معقدة مشتقة من اللزوم المنطقي ، فهى ناتجة عن تمييز نوعين من القياس من الشكل الأول، الضرب الأول، وهذان النوعان يختلطان عادة ، وأولهما المثال المشهور أن سقراط إنسان ولذا فهو فان ، والثانى أن الإغريق ناس ولذا فهم فانون. وقد نصت بديهية «بيانو» على هاتين الصورتين . وينبغي أن نلاحظ أنه بسبب تعريف ما نعنى بقولنا إن فصلًا داخل في آخر ، فإن الصورة الأولى تتج عن البديهية الآتية : إذا كانت و ، لـ ، مر ثلاث قضايا ، وكانت و يلزم عنها أن لـ يلزم عنها مر ، فإن حاصل ضرب و و لـ يلزم عنها مر. وقد وضع بيانو هذه الأولية الآن بدلًا من الشكل الأول للقياس^(١). فهى أعم ولا يمكن استنتاجها من العورة المذكورة . أما الصورة الثانية للقياس فإنها عند تطبيقها على القضايا بدل الفصول تنص على أن اللزوم متعدد ، وهذه القاعدة فى الواقع هى روح كل سلسلة من الاستنتاج . (ه) وبعد ذلك نأتى على مبدأ للاستدلال يسميه «بيانو» بالتركيب : وهو ينص على أنه إذا كان ا داخلًا فى ب ، وكذلك فى ح ، فهو داخل فى الجزء المشترك فى كليهما . وتقرير هذا المبدأ بالنسبة للقفازا ينص على أنه إذا كانت قضية ما يلزم عنها كل من قضيتين أخريين فإنه يلزم عنها الحكم بهما معاً أو حاصل ضربهما المنطقي . وهذا هو المبدأ الذى أسميناه التركيب آنفاً .

هـ — ومن هذه النقطة نسير فى نجاح إلى أن نحتاج إلى فكرة السلب التى تعتبر فى الطبعة من كتاب Formulaire التى نأخذ عنها أنها فكرة أولية جديدة ويعرف الانفصال بواسطتها . ومن السهل تعريف سلب الفصل بواسطة سلب القضية . لأن « س هـ لا ا » تساوى « س ليست ا » ولكننا نحتاج إلى بديهية تقول أن لا-ا هو فصل، وبديهية تقول أن لا-لا هو ا . ولقد جاء «بيانو»

بديهية ثالثة وهى : إذا كانت a ، b ، c فصولا ، وكان a داخل b ، c ، وكانت c هى a ولكنها ليست c ، فإن c ليست b . وفى صورة أمثل : إذا كانت c ، a ، b ثلاث قضايا وكانت c ، a معاً يلزم عنهما b ، وكانت c صادقة بينما a كاذبة ، فإن c كاذبة . ويمكن تحسينها مرة ثانية بوضعها فى الصورة الآتية : إذا كانت a ، b ، c قضيتين ، وكانت a يلزم عنها b ، فإن لا - a يلزم عنها لا - b . وهى صورة حصل عليها «بيانو» كاستنباط . فإذا قدمنا الكلام عن القضايا على الكلام عن الفصول أو دوال القضايا ، أمكننا ، كما رأينا ، أن نتحاشى السلب كفكرة أولية ، كما أمكننا استبدال جميع البديهيات الخاصة بالسلب ، بقاعدة الاختزال .

نتكلم الآن عن الانفصال أو حاصل الجمع المنطقي لفصلين ، وفى هذا نجد «بيانو» يغير طريقته أكثر من مرة . فى الطبعة التى نأخذ عنها يعرف بيانو « a أو b » بأنها سلب لحاصل ضرب لا - a ، لا - b المنطقي ، أى فصل الحدود التى ليست لا - a ، ولا b معاً . وفى الطبعات التالية (مثلا Formulaire ، ١٩٠١ ص ١٩) تجد تعريفاً أقل اصطناعاً مثلاً « a أو b » تتألف من جميع الحدود التابعة لكل فصل يشتمل على b . وليس هناك اعتراض منطقي على أى من التعريفين . وينبغى ألا يغيب عن بالنا أن a ، b فصلان ، وأنه قد يكون هناك معنى مختلف من ناحية المنطق الفلسفى لفكرة انفصال الأفراد مثل «على أو محمود» وسأبحث هذا الموضوع فى الباب الخامس . وعلينا أن نذكر أننا إذا بدأنا بالحساب التحليلي للقضايا فإن الانفصال يعرف قبل السلب . ولكن بالتعريف السابق (تعريف عام ١٨٩٧) يلزم أن يعرف السلب أولاً .

٣٦ - ثم تجئ بعد ذلك الفكرتان المرتبطتان وهما فكرة الفصل الصفري ، وفكرة وجود الفصل . فى طبعة ١٨٩٧ يعرف الفصل بأنه صفري عندما يكون داخل a فى كل فصل . وإذا تذكرنا تعريف دخول فصل a فى فصل b « a يلزم عنها أن a هى b لجميع قيم a » حيثئذ يجب أن نعتبر أن

الزوم صادق لجميع القيم ، وليس فقط لتلك القيم التي تكون فيها س حقيقة هي ١ . ولم يكن «بيانو» واضحاً في هذه النقطة، وأشك إذا كان قد كون له رأياً فيها . فلو أن الزوم إنما كان صحيحاً عندما تكون س حقاً هي ١ لما أدى إلى تعريف الفصل الصفري الذي لا يصح فيه هذا القرض لجميع قيم س . ولست أدري ألهذا السبب أم لغيره قد عدل «بيانو» عن تعريف الاستغراق في الفصول بواسطة الزوم الصوري بين دوال القضايا ، وأصبح الاستغراق في الفصول على ما يبدو لا يمكن تعريفه. وثمة تعريف آخر فصله «بيانو» (مثلاً ١٨٩٥F ص ١١٦) في وقت من الأوقات ، وهو أن الفصل الصفري هو حاصل ضرب أي فصل في سلبه — وهو تعريف تنطبق عليه مثل الملاحظات السابقة . وفي (R.d.M. VII, No. ١ (3, Prop. I.o.) يعرف الفصل الصفري أنه فصل الحدود تدخل في كل فصل ، أي فصل الحدود س التي هي مثل أن «١ فصل» يلزم عنها أن «س هي ١» لجميع قيم س. وليس هناك بالطبع حدود مثل س . وهناك صعوبة منطقية كبيرة في تفسير فصل من جهة الماصدق وليست له ما صدقات وسنرجع إلى هذا في الباب السادس .

ومن هنا يسير منطق «بيانو» سيراً حسناً، ولكن ما زال به نقص من ناحية واحدة هو أنه لا يعترف بالأولية لقضايا العلاقات التي لا تقرر عضوية في فصل. ولهذا السبب نجد تعريف الدالة ^(١) وغيرها من الأفكار التي تدل أساساً على العلاقات ، معيبة ، ولكن من السهل إصلاح هذا العيب بتطبيق المبادئ الموجودة في كتابه Formulaire على منطق العلاقات بالطريقة التي شرحناها آنفاً ^(٢) .

(١) انظر مثلاً F. 1901, Part ١, † 10, Prop. 1.0.01 (p. 33).

(٢) انظر مقالتي "Sur la Logique des relations," R.d.M. Vol. VII, 2 (190).

الباب الثالث

الزوم واللزوم الصورى

٣٧ - لقد اجتهدت فى الباب السابق أن أقدم ، باختصار ومن غير نقد ، كل ما تحتاجه الرياضة البحتة من معطيات فى صورة أفكار وقضايا أساسية صورية . وسأبين فى الأجزاء التالية أن تلك المعطيات هى كل ما نحتاجه ، وذلك بتعريف مختلف التصورات الرياضية - العدد ، واللانهاية ، والاتصال ، ومختلف الفراغات الهندسية ، والحركة . وسأحاول جهد طاقى فيما يبق من الجزء الأول أن أبين المشكلات الفلسفية التى تنشأ عن تحليل هذه المعطيات كما سأبين الاتجاه الذى أنصوّر أنه يساعد على حل هذه المشكلات . وسنكشف عن بعض المعانى المنطقية التى وإن كانت تبلى أساسية جداً فى المنطق إلا أن البحث لا يتناولها عادة فى المؤلفات الخاصة بموضوعنا . وبذلك نضع أمام نظر المنطقة الفلسفية مسائل مجردة عن ثياب الرمزية الرياضية .

وهناك نوعان من الزوم ، المادى والصورى ، أساسيان لكل نوع من الاستنتاج . وإنى أود أن أفحص فى الباب الحالى هذين النوعين ، وأميز بينهما ، وأبحث بعض الطرق التى نحاول بها تحليل النوع الثانى منهما .

وعند البحث فى الاستنباط ، من المألوف أن نسمح بإدخال عنصر نفسانى ، وأن نعرف بمصولنا على معرفة جديدة بواسطته . ولكنه واضح أننا عندما نستنتج قضية من أخرى استنتاجاً صحيحاً إنما نفعل ذلك بفضل علاقة قائمة بين القضيتين سواء أنصوّرناهما أم لم ننصوّرهما . فى الواقع أن دور العقل فى الاستنباط هو مجرد الاستقبال كما نفترض عادة أن هذا هو دوره فى إدراك المحسوسات . والعلاقة التى بفضلها يمكننا الاستنتاج الصحيح هى ما أسمينا الزوم المادى . ولقد سبق أن رأينا أننا ندور فى حلقة مفرغة لو عرفنا هذه العلاقة بما يأتى :

إذا كانت قضية مّا صادقة فإن قضية أخرى تكون صادقة، لأن كلا من «إذا» و«فإن» تتطلب لزوماً. وفي الواقع أن العلاقة تكون قائمة إذا قامت بالفعل، دون نظر إلى صدق أو كذب القضايا المستخلصة.

وهكذا عندما نتابع ما يترتب على فروضنا من اللزوم ينتهي بنا المطاف إلى نتائج لا تتفق بأية حال مع مانعرفه عادة عن اللزوم. فقد وجدنا أن أية قضية كاذبة تلزم عنها كل قضية، وأن أية قضية صادقة تلزم عن كل قضية. فالقضايا كجموعة من الأطوال طول كل منها بوصة أو بوصتان، واللزوم كالعلاقة «يساوى أو أصغر من» بين هذه الأطوال. فليس من المسلم به عادة أن $2 + 2 = 4$ ، يمكن أن تستنبط من «سقراط إنسان» أو أن كلا من القولين يلزم عن «سقراط مثلث». وفي اعتقادي أن السبب الرئيسى في ترددنا في الاعتراف بهذا النوع من اللزوم هو تعلقنا باللزوم الصورى، وهو فكرة أكثر ألفة لدينا، وتكون ماثلة حقاً أمام العقل حتى عندما يكون الكلام صراحة عن اللزوم المادى. فعند الاستنباط من «سقراط إنسان» قد جرت العادة لا على الكلام عن الفيلسوف الذى أثار الأثنين، ولكن على اعتبار أن سقراط مجرد رمز يمكن أن يحمل محله أى رجل آخر. وليس هناك ما يمنع، لولا ضرب من التحيز العامى للقضايا الصحيحة، من أن نضع مكان سقراط أى شىء آخر، كالعدد، أو المنفصلة، أو الكعكة مثلاً. ومع ذلك فكلما أمكن استنباط قضية بالذات من أخرى، كالحال فى هندسة أقليدس، فإن الأمر يتضمن استخدام اللزوم المادى. ولو أنه بصفة عامة يمكن اعتبار اللزوم المادى كحالة خاصة من اللزوم الصورى نحصل عليه بوضع قيمة ثابتة للمتغير، أو المتغيرات الداخلة فى اللزوم الصورى المذكور. ومع أنه لا نزال ننظر إلى العلاقات بعين الرهبة الناجمة عن أنها غير مألوفة، ومع أنه من الطبيعى أن نتساءل عما إذا كانت علاقة مثل اللزوم موجودة فعلاً، إلا أنه بفضل المبادئ العامة التى وضعناها فى القسم ح من الباب السابق ينبغي أن توجد علاقة لا تقوم إلا بين القضايا،

وتقوم بين أى قضيتين إما أن تكون الأولى كاذبة أو تكون الثانية صادقة. ومن بين مختلف العلاقات المتكافئة التى تحقق هذه الشروط هناك علاقة تسمى اللزوم، وإذا كانت مثل هذه الفكرة غير مألوفة فهذا لا يكتفى لإثبات أنها من نسج الخيال .

٣٨- وهنا يتحتم النظر فى مسألة منطقية غاية فى الصعوبة وهى التمييز بين القضية المحكوم بها فعلاً والقضية التى تعتبر مجرد تصور معقد . ويذكر القارئ أن إحدى المبادئ الأولية التى لا نستطيع لها إثباتاً هى أنه إذا كان المقدم فى لزوم ما صادقاً فإنه يمكن الاستغناء عنه مع الحكم بإثبات التالى . وقد لاحظنا أن هذا المبدأ يتعد عن التقرير الصورى ويشير إلى قصور الطريقة الصورية بصفة عامة . ويستخدم هذا المبدأ كلما تكلمنا عن أننا أثبتنا قضية ما ، لأن الذى يحدث هو فى جميع هذه الأحوال أننا ثبت أن هذه القضية تلازم عن قضية أخرى صادقة . وهناك صورة أخرى يستخدم فيها هذا المبدأ باستمرار وهى التعويض بثبات ، يحقق المقدم ، فى التالى وذلك فى اللزوم الصورى . فإذا كانت ϕ تستلزم ψ لجميع قيم ϕ ، وإذا كان ϕ ثابتاً يحقق ψ فإنه فى مكنتنا أن نقرر ψ مستغنيين عن صحة المقدم ϕ . وهذا يحدث كلما طبقنا على القضايا الخاصة أياً من قواعد الاستنباط التى تفرض أن المتغيرات هى قضايا . وعلى ذلك فالقاعدة المذكورة أساسية لأى نوع من أنواع البرهان .

ويتضح استقلال هذا المبدأ عندما ننظر فى لغز «لويس كارول» «ماذا قالت السلحفاة لأخيل» ^(١) . ولقد أدت بنا قواعد الاستنباط التى ارضيناها إلى أنه إذا كانت ϕ ، ψ قضيتين فإن ϕ مع ψ يلزم عنها ϕ ، ψ يلزم عنها ϕ ، وقد نتصور لأول وهلة أن هذا يمكننا من تقرير ϕ بشرط أن تكون ψ صادقة ويلزم عنها ϕ . ولكن اللغز الذى ذكرنا يوضح أن هذا ليس هو الحال، وأنه ما لم نستخدم مبدأ جديداً ، فإننا ندور فى عدد لا نهاية له من اللوازم التى تزداد تعقيداً فى كل خطوة دون أن نصل أبداً إلى تقرير ϕ . فنحن فى الواقع فى حاجة

إلى فكرة «إذن» وهي تختلف تماماً عن فكرة «يلزم عنها»، وتقوم بين الأشياء المختلفة . ففي النحو نميز بين الفعل واسم الفاعل أى مثلاً بين «أ أكبر من ب» و «بين» من حيث أن «أ أكبر من ب» في العبارة الأولى تقرر بالفعل قضية، وفي الثانية مجرد اعتبار لهذا . ولكن هذه أمور نفسية، في حين الفرق الذي أريد أن أوضحه فرق منطقي حقيقي . ومن الواضح أنه إذا سمح لي باستخدام كلمة حكم في معنى غير نفساني فإن القضية «و- تلزم عنها ل» تقرر لزوماً مع أنها لا تقرر و- أو ل، فالقاف والكاف اللتان تتدخلان في هذه القضية ليسا بال ضبط نفس القاف والكاف اللتين هما قضيتين منفصلتين ، على الأقل عندما تكونان صادقتين. والسؤال هو : كيف تكون قضية صادقة بالفعل وتختلف عنها إذا كانت شيئاً واقعاً ولم تكن صادقة . ومن الواضح أن القضايا الصادقة والقضايا الكاذبة كذلك هي أشياء من نوع ما ، ولكن القضايا الصادقة لها خاصية ليست للقضايا الكاذبة ، وهي خاصية يمكن في معنى غير نفساني أن تسمى «ما يحكم بها» . إلا أنه لمن العسير جداً وضع نظرية مقبولة لا تناقض فيها لهذه المسألة . لأنه لو كان الحكم يغير بأى حال القضية، فإن كل قضية أمكن بالاً يحكم بها في أى سياق لا يمكن أن تكون صادقة لأنها عندما يحكم بها تصبح قضية غير الأولى . ولكن هذا واضح البطلان لأن في «و- يلزم عنها ل» و- ل لم يحكم بهما ومع ذلك يجوز أن تكونا صادقتين. وإذا تركنا هذا اللغز للمنطق، فإنه ينبغي أن يكون هناك فرق بين القضية المحكوم بها والقضية غير المحكوم بها^(١) . وعندما نقول «إذن» نكون قد أثبتنا علاقة لا تقوم إلا بين القضايا المحكوم بها، وهي لذلك تختلف عن الزوم . وكلما وردت عبارة «إذن» يمكن ترك المقدم، وتقرير التالى وحده . ويبدو أن هذه أول خطوة في حل لغز «لو يس كارول» .

٣٩ — غالباً ما يقال إنه يجب أن يكون للاستنباط مقدمات ونتيجة . ويبدو أن الاعتقاد السائد هو أنه يلزم لذلك مقدمتان أو أكثر لجميع الاستنباطات

(١) فريج له رمز خاص للدلالة على الحكم .

أو لأغلبها على الأقل . ويحمل على هذا الاعتقاد ، لأول وهلة ، حقائق ظاهرة ، فكل قياس مثلاً له مقدمتان . ولكن نظرية كهذه تعقد علاقة اللزوم تعقيداً كبيراً ، فهي تجعل منه علاقة ذات أى عدد من الحدود ، وأنها متماثلة بالنسبة لجميع تلك الحدود عدا واحداً منها ، فهي غير متماثلة بالنسبة لهذا الحد (النتيجة) . وهذا التعقيد ليس لازماً مع ذلك ، أولاً لأن التقرير الآتى لعدد من القضايا هو في حد ذاته قضية مفردة . وثانياً ، لأنه بحسب القاعدة التى أسميناها «التصدير» ، من الممكن دائماً عرض اللزوم فى صراحة على أنه قائم بين قضايا مفردة . ومثال الحالة الأولى : إذا كان لـ فصل من القضايا ، فإن كل قضايا الفصل لـ تقرر فى القضية الواحدة « لجميع قيم س » ، إذا كانت س يلزم عنها س ، فإن « س هى لـ » يلزم عنها س أو باللغة العادية « كل لـ صادقة » . ومثال الحالة الثانية ، التى تفرض أن عدد المقدمات محدود : « لـ لـ يلزم عنها س » يساوى « إذا كانت لـ قضية » لـ يلزم عنها أن لـ يلزم عنها س » وفى الصورة الأخيرة يكون اللزوم قائماً صراحة بين القضايا المفردة . وعلى ذلك فى مكتبتنا أن نعتبر أن اللزوم هو علاقة بين قضيتين لا علاقة تربط عدداً اختيارياً من المقدمات بنتيجة واحدة .

٤٠ - نتحدث الآن عن اللزوم الصورى ، وهو معنى أصعب بكثير من معنى اللزوم المادى . ولكى نتجنب الفكرة العامة لدالة القضايا دعنا نبدأ ببحث حالة خاصة مثل « س إنسان يلزم عنها أن س فان لجميع قيم س » وهذه القضية تساوى « جميع الناس قانون » « كل إنسان فان » « وأى إنسان فان » . ويبدو أنه من المشكوك فيه جداً أن هذه هى نفس القضية الأولى . وهى أيضاً مرتبطة بقضية من حيث المفهوم الخالص فيها نقرر أن الإنسان فكرة مركبة والفتاء إحدى مركباتها . ولكن هذه القضية غير تلك التى نحن بصدددها . فى الحق أن مثل هذه القضايا المفهومية لا تكون حاضرة دائماً عندما يكون فصل ماً داخلاً فى فصل آخر . فبصفة عامة يمكن تعريف كل من الفصلين بعدد من المحمولات

المختلفة ، وليس من الضروري بأيتحال أن يكون كل محمول في الفصل الأصغر مشتملاً على كل محمول في الفصل الأكبر كعامل من عوامله . وقد يحدث في الواقع أن يكون كل من المحمولين بسيطاً من الناحية الفلسفية . فـ «اللون» و«الموجود» كلاهما بسيط ، ومع ذلك ففصل الألوان جزء من فصل الموجودات . ووجهة نظر المفهوم المشتقة من المحمولات هي في معظمها غير لازمة للمنطق الرمزي ، ولا للرياضة ، ولن أبحث فيها أكثر من ذلك في الوقت الحاضر .

٤١ - وقد يتسرب الشك ، بادئ ذي بدء ، عما إذا كانت «س» إنسان يلزم عنها «س» فان «تعتبر تقريراً تاماً لجميع الحدود الممكنة ، أو فقط للحدود التي هي مثل الناس . ومع أن «بيانو» ليس صريحاً في هذه النقطة إلا أنه يبدو أنه من أنصار وجهة النظر الأخيرة . ولكن في هذه الحالة يصبح القرض عديم الأهمية ويصبح مجرد تعريف «س» هو : «س» تعني أي إنسان . ويصبح القرض مجرد تقرير خاص بمعنى الرمز «س» ، وجميع ما يقرر خاصاً بالموضوع الذي يعالجه الرمز يوضع في النتيجة . فالمقدمة تقول : «س» تعني أي إنسان . والنتيجة تقول : «س» فان . ولكن الزوم لا يتناول إلا الرمزية ، أي : ما دام كل إنسان فان ، فإذا كانت «س» تدل على إنسان ، فإن «س» فان . وبناء على وجهة النظر هذه يخفى الزوم الصوري كلية تاركاً لنا القضية الآتية : «أي إنسان فان» كتمثيل عن جميع ما يهم في القضية ذات المتغير . ويبقى علينا الآن أن نفحص القضية «أي إنسان فان» وأن نفسرها ، إذا أمكن ذلك ، دون إدخال المتغير أو الزوم الصوري مرة أخرى . ولابد من الاعتراف أن وجهة النظر هذه تجنبنا كثيراً من المصاعب . خذ مثلاً التقرير الآتي لجميع القضايا الخاصة بفصل مآ لـ . فهذه لا يعبر عنها بقولنا «س» هي لـ يلزم عنها «س» لجميع قيم «س» لأن هذه القضية كما هي لا تدل على المقصود ، لأنه لو أن «س» ليست قضية فإن «س» هي لـ لا يمكن أن يلزم عنها «س» . وعلى ذلك فحال تغيير «س» يجب أن يقتصر على قضايا لا إذا قلنا (انظر بند ٣٩) المقدم «س» يلزم عنها «س» . وهذه

الملاحظة تنطبق بصفة عامة ، في الحساب التحليلي للقضايا ، على جميع الحالات التي تمثل فيها النتيجة بحرف واحد ، فما لم يمثل بالفعل هذا الحرف قضية ، فإن الزوم المقرر يكون باطلاً لأن القضايا فقط هي التي تلزم . والمهم هو أنه إذا كانت س هي المتغير الذي نتكلم عنه ، فإن س ذاتها قضية لجميع قيم س التي هي قضايا ، ولكنها ليست لغير ذلك من القيم . وهذا يوضح حدود الميدان الذي يجب ألا يخرج عنه المتغير ، فهو يجب أن يتغير فقط داخل دائرة القيم التي يكون فيها جانباً الزوم الرئيسي قضايا ، أو بعبارة أخرى يجب أن يكون الجانبان دوال قضايا خالصة عندما لا نضع ثابتاً مكان المتغير . وإذا لم تلزم هذه القيود فإننا قد نترلق بسرعة في الأخطاء . ونذكر هنا أنه قد نجد أي عدد من اللوازم التابعة لا يلام فيها أن تكون حدودها قضايا ، فالكلام هنا عن اللوازم الرئيسية . خذ مثلاً أولى قواعد الاستنباط : إذا كانت و يلام عنها ل فإن و يلام عنها ل ، فإن هذا يصدق سواء كانت و ، ل قضيتين أو لم تكونا كذلك . لأنه إذا لم تكن أي واحدة منهما قضية فإن « و يلام عنها ل » تصبح كاذبة ، ولكنها تبقى قضية . ففي الواقع بمقتضى تعريف القضية ، تقرر القاعدة التي وضعناها أن « و يلام عنها ل » دالة قضية أي أنها قضية ، لجميع قيم و ، ل . ولكن إذا طبقنا قاعدة « الاستيراد » على هذه القضية لنحصل على « و يلام عنها ل » فإننا نحصل على صيغة تصدق فقط عندما تكون و ، ل قضيتين ، ولكي نجعلها صادقة دائماً يجب أن نقدم لها بالمقدم « و يلام عنها ل » ، ل يلام عنها ل » وبهذه الطريقة نستطيع التخلص من قيد تغير المتغير في أغلب الحالات إن لم يكن فيها جميعاً . فثلاً في تقرير حاصل الضرب المنطقي لفصل من القضايا نجد الصيغة « إذا كانت س يلام عنها س فإن س هي ل يلام عنها س » تلبو ولا اعتراض عليها وتسمح أن تتغير س دون قيد . وهنا نجد أن اللوازم التابعة في المقدمة والنتيجة لوازم مادية ، أما الزوم الرئيسي وحده فهو صوري .

فلذا رجعنا إلى «س» إنسان يلزم عنها «فان» فإنه يتضح أننا لا نحتاج إلى قيد لكي يتحقق أننا نستخدم قضية حقيقية. وواضح أيضاً أنه مع أننا قد نقصر قيم «س» على الناس، ومع أنه يظهر أننا نفعل ذلك في القضية «جميع الناس قانون» إلا أنه ليس هناك من سبب لتقييد قيم «س» بهذا القيد إذا كان الأمر يتعلق فقط بصدق القضية. فسواء أكان «س» إنساناً أم لم يكن كذلك فقولنا «س» إنسان «هي دائماً» عندما نضع ثابتاً مكان «س»، قضية يلزم عنها، لجميع قيم «س»، القضية «س» فان». وإلى أن نقبل القرض كذلك في الحالات التي يكون فيها باطلاً سنجد أنه من المستحيل علينا أن نعالج علاجاً مرضياً حالة الفصل الصفري والدوال الصفرية للقضايا. وكلما أمكن المحافظة على صحة لزومنا الصوري يجب أن نسمح للمتغير «س» أن يأخذ جميع القيم دون استثناء، وعندما نجد من الضروري وضع قيود على تغييره، ينبغي ألا يعتبر اللزوم صورياً، إلى أن يزول هذا القيد حين نبدأ به كعقلم (إذا كانت Ψ «س» قضية كلما كانت «س» تحقق Φ «س»، حيث Φ «س» دالة قضايا، وإذا كانت Ψ «س»، كلما كانت قضية، يلزم عنها X «س» فإن Ψ «س» يلزم عنها X «س» ليست لزوماً صورياً ولكن Φ «س» يلزم عنها أن Ψ «س» يلزم عنها X «س» هي لزوم صوري).

٤٢ — نلاحظ أن «س» إنسان يلزم عنها «فان» ليست علاقة بين دالتي قضيتين، ولكنها بذاتها دالة قضية مفردة لها خاصية جميلة وهي أنها دائماً صادقة. ذلك أن «س» إنسان «كما هي ليست قضية، بالمرّة ولا يلزم عنها شيء». وينبغي ألا نغير «س» في «س» إنسان» ثم مستقلاً عن ذلك نغيرها في «س» فان» لأن هذا يؤدي إلى القضية «كل شيء إنسان» يلزم عنها «كل شيء فان» وهي قضية صادقة إلا أنها ليست ما قصدنا إليه. وينبغي التعبير عن هذه القضية بمتغيرين إذا أردنا الاحتفاظ بلغة المتغيرات، فيقال: «س» إنسان يلزم عنها أن «س» فان» ولكن هذه الصيغة غير مقبولة أيضاً لأن معناها الطبيعي يكون «إذا كان كل شيء إنساناً فإن كل شيء فان». وما نريد (٦)

توكيده هو أنه مع الاعتراف بأن من متغير ينبغي أن تكون هي بذاتها في طرفي اللزوم، وهذا يحتاج ألا نحصل على لا ونا الصورى بأن نغير أولاً (مثلاً) سقراط في «سقراط إنسان» ثم في «سقراط فان» ولكن ينبغي أن نبدأ بالقضية كلها «سقراط إنسان يلزم عنها سقراط فان» ونغير سقراط في هذه القضية بكليتها. وهكذا يكون اللزوم الصورى هنا هو تقرير لفصل من اللوازم لا تقرير للزوم مفرد. وبالجمله نحن لا نتكلم عن لزوم واحد يحتوى على متغير، بل عن لزوم متغير. ويكون لدينا فصل من اللوازم، ليس بينها واحد يحتوى على متغير، ونحن نقرر أن كل عضو من أعضاء هذا الفصل صادق. وهذه هي الخطوة الأولى نحو تحليل الفكرة الرياضية عن المتغير.

وقد نتساءل كيف يمكن تغيير سقراط في القضية «سقراط إنسان يلزم عنها سقراط فان» بفصل الواقع من أن القضايا الصادقة تلزم عن جميع القضايا الأخرى نجد أن «سقراط إنسان يلزم عنها سقراط فيلسوف» ولكن في هذه القضية وللأسف الشديد نجد أن تغيير سقراط قد قيّد قيداً شديداً. وقد بين هذا أن اللزوم الصورى يتضمن شيئاً أسمى من علاقة اللزوم وأن علاقة إضافية يجب أن تقوم عندما يستطيع حد أن يتغير. ففي المثال الذى نحن بصدد، من الطبيعى أن نقول إن العلاقة المتضمنة هي علاقة التداخل لكل من فصلى الناس والفنانين، وهي ذات العلاقة التى كانت تعرف وتبين في لزومنا الصورى. ولكن وجهة النظر هذه أبسط من أن تفسر جميع الحالات، ولذلك لا حاجة لنا بها في أية حال. ويمكن تفسير عدد أكبر من الحالات، بالفكرة التى سأممها «الحكم assertion» وسنشرح الآن باختصار هذه الفكرة تاركين تحليلها للباب السابع.

٤٣- وقد جرت العادة دائماً إلى تقسيم القضايا إلى موضوع ومحمول، ولكن هذا التقسيم به عيب هو إغفال الفعل. ومع أننا نجد ترضية لطيفة بكلام دارج عن الرابطة إلا أن الفعل يحتاج إلى احترام أكثر من ذلك. ويمكن القول

بصفة عامة أنه يمكن تقسيم القضايا ، بعضها بطريقة واحدة والبعض بأكثر من طريقة ، إلى حد هو الموضوع ، وإلى شيء نقوله عن الموضوع وسأسمى هذا الشيء الحكم . وبذلك يمكن تقسيم «سقراط هو إنسان» ^(١) إلى «سقراط» و«هو إنسان» . والفعل - الذى هو العلامة المميزة للقضايا - يبقى تابعاً للحكم ، ولكن الحكم ذاته متزوعاً عن موضوعه لا يوصف بالصدق أو الكذب . وفي المناقشات المنطقية كثيراً ما نجد فكرة الحكم ، ولكن حيث تُستعمل لها كلمة قضية فإنها لذلك لا تحظى باعتبار مستقل . خذ مثلاً أحسن نص عن تطابق ما لا يمكن تمييزهما الواحد عن الآخر إذا كان س ، ص أى شيئين مختلفين ، فإننا فى مكتنا أن نحكم بشيء عن س دون أن يمكن الحكم به عن ص « ولولا كلمة حكم ، وهى ما يحل محلها عادة كلمة «قضية» ، لما كان هناك أى اعتراض على هذه العبارة . كذلك يمكن أن يقال «سقراط كان فيلسوفاً» ، ونفس الشيء صحيح بالنسبة لأفلاطون » ومثل هذه العبارات تحتاج إلى تحليل القضايا إلى حكم وموضوع حتى يكون هناك شيء مطابق يمكن أن نقول إنه أثبت للموضوعين .

٤٤ - ويمكن أن نرى الآن كلما كان التحليل إلى موضوع وحكم مشروعاً كيف نميز بين اللوازم التى تحتوى على حد يمكن أن يتغير من تلك التى ليس هذا هو حالها . وهناك طريقان لهذا التمييز وعلينا أن نختار بينهما . فيمكن أن يقال إن هناك علاقة بين الحكمين « يكون إنساناً » ، « يكون قانياً » ، وبفضل هذه العلاقة عندما تقوم إحدهما تقوم الأخرى . أو نستطيع أن نحلل القضية الكاملة « سقراط هو إنسان يلزم عنها سقراط هو فان » إلى سقراط وحكمته ، ثم نقول إن هذا الحكم قائم لجميع الخلود . ولا يمكن أن تقوم أى من هاتين النظريتين مقام التحليل السابق لعبارة « س هو إنسان يلزم عنها س هو فان »

(١) فى الإنجليزية القضية ثلاثية فيها موضوع ، ومحمول ، والرابطة أى فعل الكينونة ، مثل Socrates is a man . أما فى العربية فهى عادة ثنائية ، مثل « سقراط إنسان » . وقولنا « سقراط هو إنسان » لا يساوى العبارة الإنجليزية تماماً (المترجم) .

إلى فصل من اللوازم المادية . ولكن أيا من النظريتين صحت فإنها تسير بالتحليل خطوة إلى الأمام . وتعتبر النظرية الأولى صعوبة هي أنه من الأمور الأساسية في العلاقة بين الحكمين القائمين أن يحكم بهما لنفس الموضوع ، ولو أنه فيما عدا ذلك لا يهم بالمرّة أى موضوع نختار . وجهة الاعتراض على النظرية الثانية تأتي من أن تحليل « سقراط إنسان يلزم عنها سقراط فان » بالطريقة المقترحة يبدو بعيد الإمكان . وتتكون القضية التى نحن بصدددها من حدين وعلاقة ، فالحدان هما « سقراط إنسان » و « سقراط فان » ويبدو أنه عندما نريد تحليل قضية علاقة إلى موضوع وحكم ينبغى أن يكون الموضوع أحد حدى العلاقة التى نحكم بها . ويبدو أن هذا الاعتراض أخطر من الاعتراض على وجهة النظر الأولى . ولذلك على الأقل فى الوقت الحاضر ، سأتخذ بوجهة النظر الأولى معتبرا لزوم الصورى مشتقا من علاقة بين حكمين .

سبق أن ذكرنا أن علاقة الاستغراق فى الفصول غير كافية . ولهذا ناشىء عن عدم إمكان اختزال القضايا بين العلاقات . خذ مثلا قولك « سقراط متزوج يلزم عنها أن سقراط كان له والد » وهنا نقول إنه لما كان لسقراط علاقة يجب أن تكون له علاقة أخرى . ولنضرب مثلا أفضل من ذلك ، هذه العبارة « ا قبل ب يلزم عنها أن ب بعد ا » . فهذا لزوم صورى فيه الحكمان (على الأقل ظاهريا) يعالجان موضوعين مختلفين . والطريقة الوحيدة لتجنب هذا هو القول بأن كلتا القضيتين فيهما كلا من ا ، ب كموضوعين ، وهو ما يختلف عن قولنا أن لهما موضوع واحد هو « ا ، ب » . وهذه شواهد توضح أن فكرة دالة القضايا وفكرة الحكم أساسيتان أكثر من فكرة الفصل ، وأن الأخيرة غير كافية لتفسير جميع حالات اللزوم الصورى . وسوف لا أطيل الكلام عن هذا الآن ، فستأتى الأمثلة كثيرة على ذلك فى الأجزاء التالية من هذا الكتاب . ومن المهم أن نذكر أن فى تحليلنا هذا اللزوم الصورى نجد أن فكرة « كل حد » مطلقة وما لا يمكن تعريفه . فاللزوم الصورى يصدق عن كل حد ، وعلى ذلك

يمكن تفسير « كل ا هي ب » بواسطة « من هي ا يلزم عنها من هي ب » ولكن كلمة « كل » الواردة هنا هي فكرة مشتقة وثانوية تفترض مقلماً فكرة « كل حـد » . ويبدو أن جوهر ما يمكن تسميته بالصواب الصورى ، والتفكير الصورى عامة ، هو أن يكون حكماً ماً مثبتاً صدقه عن جميع الحدود . وإلى أن نقبل فكرة « كل حـد » يصبح الصواب الصورى مستحيلاً .

٤٥ - وترجع الأهمية الأساسية للزوم الصورى إلى أنه متضمن فى جميع قواعد الاستنباط ، وهذا يبين أننا لا نستطيع أن نأمل فى تعريفه تعريفاً كاملاً بعبارة الزوم المادى ، إنما ينبغي أن ندخل عنصراً أو عناصر جديدة . ومع ذلك فعلينا أن نلاحظ أنه فى الاستنباط الخاص ليس ضرورياً أن تكون القاعدة التى يجرى بحسبها الاستنباط مقدمة . وقد أكد هذا الرأى برادلى^(١) . وهى مرتبطة ارتباطاً وثيقاً بمبدأ حذف المقدمة الصادقة ، وهى ناحية تتحطم فيها الصورية . فلكى يمكن تطبيق قاعدة من قواعد الاستنباط ينبغي شكلاً أن تكون لدينا مقدمة تقرر أن الحالة التى نحن بصدها هى حالة من حالات القاعدة . وعلينا بعد ذلك أن نثبت القاعدة التى نسير بها من القاعدة إلى الحالة الخاصة ، وأن نثبت أننا نعالج حالة خاصة من هذه القاعدة . وهكذا نمضى فى عملية لا تنتهى . والحقيقة طبعاً هى أن أى لوم تسنده قاعدة الاستنباط يقوم فعلاً ، وليس هو مجرد شئ يلزم عن القاعدة . وهذا مثلاً على المبدأ غير الصورى ، مبدأ حذف المقدمة الصادقة . فإذا كانت قاعدتنا يلزم عنها لزوم ما ، فإنه يمكن حذف القاعدة والحكم بالزوم . ولكن تبقى حالة أن كون قاعدتنا يلزم عنها فعلاً الزوم المذكور ، إذا أثبتت القاعدة أصلاً ، ينبغي أن ندرك ببساطة ، لا أن يكفلها أى استنباط صورى . وغالباً ما يكون الإدراك المباشر للزوم الذى نحن بصده سهلاً ومشروعاً تبعاً لذلك لسهولة إدراك أنه يلزم عن واحد أو أكثر من قواعد الاستنباط .

ونجمل كلامنا عن لزوم الصورى . فقد قلنا إن اللزوم الصورى هو إثبات كل لزوم مادى لفصل معلوم . وفصل اللوازم المادية المتضمنة فى الحالات البسيطة ، هو فصل جميع القضايا التى يثبت فيها أن حكماً معلوماً بالنسبة لموضوع أو عدة موضوعات معلومة يلزم عنه حكم معلوم بالنسبة لنفس الموضوع أو الموضوعات . وعندما يقوم لزوم صورى ، فقد اتفقنا على اعتباره ، كلما أمكن ذلك ، ناشئاً عن علاقة بين الأحكام المعنية . وتثير هذه النظرية صعوبات فلسفية كبيرة ، ونحتاج للدفاع عنها إلى تحليل دقيق لمكونات القضايا . وهو ما نريد الكلام عنه الآن .

الباب الرابع

أسماء الأعلام والصفات والأفعال

٤٦ - سنبحث في هذا الباب في بعض مسائل خاصة تدخل فيما يمكن أن نسميه بالنحو الفلسفي . وفي اعتقادي أن دراسة النحو تلي ضوئاً على المسائل الفلسفية أكثر مما يعترف به الفلاسفة عادة . ومع أن الفروق النحوية لا يمكن دون تمحيص اعتبارها مقابلة لفروق فلسفية حقة إلا أن بعضها شاهد لأول وهلة على بعضها الآخر ، وكثيراً ما يمكن استخدامها بفائدة كبيرة كأداة من أدوات الكشف . وعلاوة على ذلك فيجب أن نعرف أن كل لفظة ترد في جملة ، فلها معنى مّا . فالصوت العديم المعنى تماماً لا يمكن استخدامه بالطريقة الثابتة إلى حد ما التي تستخدم بها اللغة الألفاظ . وبذلك يمكن التحقق من صحة التحليل الفلسفي لقضية مّا بالتدرب على تحديد معنى كل لفظ من الألفاظ المستخدمة في الجملة التي تعبر عن القضية . وعلى العموم في نظري أن النحو يقربنا من المنطق الصحيح بأكثر مما يعترف به الفلاسفة عادة . وسنستخذ من النحو مرشداً لنا فيما يلي دون أن نصبح عبيداً له .

وهناك ثلاثة من أجزاء الكلام نجد لها أهمية خاصة هي : المسميات ، والصفات ، والأفعال . ومن بين المسميات ما هو مشتق من الصفات أو الأفعال كقولك الإنسانية من إنسان ، وقولك متابعة من يتبع (والكلام هنا عن الاشتقاق المنطقي وليس عن الاشتقاق الصرفي) . أما أسماء الأعلام ، أو المكان ، والزمان ، والمادة فهي ليست مشتقات ، بل يلدو أساساً أنها مسميات . وما دما نبحت عن ته نيف للأفكار لا الألفاظ ، فسأسمى بالصفات أو المحمولات جميع الأفكار التي يمكن أن تكون كذلك حتى ولو كانت في الصيغة التي يسميها النحومسميات . فالحقيقة كما سنرى هي أن «إنساني» و«إنسانية» تدلان على نفس

التصور تماماً ، وإنما تستخدم الواحدة أو الأخرى على حسب نوع العلاقة التي يعبر عنها هذا التصور بالنسبة للمكونات الأخرى في القضية التي تستخدم فيها . فالفرق الذي نحتاج إليه ليس مطابقاً للفرق النحوي بين المسمى والصفة لأن التصور الواحد يمكن بحسب الأحوال أن يكون مسمى ، كما يمكن أن يكون صفة . ولكننا نحتاج إلى التمييز بين أسماء الأعلام والأسماء ، أو بوجه أصح التمييز بين الأشياء التي تدل عليها هذه الأسماء .

فكل قضية كما رأينا في الباب الثالث يمكن تحليلها إلى شيء محكوم به وشيء يدور عليه هذا الحكم . فاسم العلم عندما يرد في قضية هو دائماً ، على الأقل بحسب أحد طرق الإعراب المختلفة (عندما تكون هناك أكثر من طريقة) الموضوع بالنسبة للقضية أو لقضية تابعة من مكوناتها ، وليس ما يقال عن الموضوع . أما الصفات والأفعال ، من الجهة الأخرى ، فهي وسعها أن ترد في قضايا لا يمكن أن تعتبر موضوعاً فيها ، وإنما مجرد أجزاء من الحكم . وتتميز الصفات بقدرتها على «الدلالة» ، وهو اصطلاح تنوى استخدامه في معنى ففي الباب الخامس . وتتميز الأفعال بصلتها الخاصة بالصدق أو الكذب ، وهي صلة من أصعب الأمور تعريفها . وبفضل هذه الصلة تميز الأفعال بين القضية المحكوم بها وغير المحكوم بها ، فتميز مثلاً بين « مات قيصر » وبين « موت قيصر » . وينبغي أن نشرح هذه الفروق شرحاً أوفى الآن ، وسنبداً بالتمييز بين أسماء الأعلام والأسماء العامة .

٤٧ - وتعرف الفلسفة مجموعة خاصة من الفروق كلها متطابقة إلى حد ما ، أعني التمييز بين الموضوع والمحمول وبين الجوهر والعرض ، وبين المسمى والصفة ، وبين « هذا this » و«الما هو what »^(١) .

وأود أن أشير باختصار إلى ما يبدو لي عن حقيقة هذه الفروق . والموضوع جد هام لأن الفرق بين الواحدية والمنادية وبين المثالية والتجريبية ، وبين هؤلاء

(١) الزوج الأخير من الحدود يرجع إلى برادلي .

الذين يقولون أن الصديق معنى* بالموجودات، وبين هؤلاء الذين ينكرون هذا الاعتقاد، كل ذلك يتوقف في كلياته أو جزئياته على وجهة النظر التي نقرها في هذه المسألة. ولكننا نبحث فيه الآن لأنه أساسى لكل نظرية عن العدد أو عن طبيعة المتغير. أما علاقته بالفلسفة فسنقفها كلية من حسابنا على ما لها من أهمية. وكل ما يمكن أن يكون موضوعاً للفكر أو ما يمكن أن يرد في قضية صادقة أو كاذبة، أو يمكن أن يعد واحداً، سأمييه «حداً». فهذه إذن هي أوسع كلمة في قاموس الفلسفة. وسأستخدم كترادفات لهذا الإصطلاح هذه الألفاظ، وحدة، فرد، وكائن entity، ويؤكد الفظان الأول أن حقيقة أن كل حد هو «واحد»، أما الثالث فاشتق من حقيقة أن كل حده كينونة، يعنى يكون بمعنى أو بآخر. فالألفاظ: رجل، لحظة، عدد، فصل، علاقة، والفول، أو أى شيء آخر يمكن ذكره هي بكل تأكيد حد؛ وإنكار أن شيئاً ما هو حد يجب أن يكون باطلا دائماً. وقد يتبادر إلى الذهن أن اللفظة إذا كانت تمثل هذا العموم فلا يمكن أن تكون ذات فائدة تذكر. ولكن بعض النظريات الفلسفية الواسعة الانتشار تخطئ وجهة النظر هذه، في الواقع نجد أن الحد له جميع الخصائص التي تنسب عادة للذوات أو المسميات. ولنبدأ بقولنا إن كل حده موضوع منطقي، مثلاً موضوع القضية التي هي نفسها واحدة. كما أن كل حد لا يتغير ولا يعلم. فالحد هو الحد، ولا يمكن أن نتصور تغييراً فيه لا يعلم شخصيته ويحوله إلى حد آخر^(١). وثم علامة أخرى تختص بها الحدود هو تطابقها العدى مع نفسها واختلافها العدى عن جميع الحدود الأخرى^(٢). والتطابق والاختلاف العدى هما مصدر الوحدة والكثرة، وعلى ذلك فالتسليم بالحدود الكثيرة يهدم مبدأ الواحدة. ومن غير المنكور أن كل جزء من قضية يمكن عده كواحد وأنه

(١) فكرة الحد التي بسطناها هنا هي تحليل لفكرة الأستاذ ج. ا. مور في مقاله عن : «طبيعة الحكم» في مجلة Mind, N.S. No. 30، ومع لك فهذه الفكرة تختلف عن تلك في بعض الجهات الهامة.

(٢) فيما يختص بالتطابق انظر مقالة مور في Proceedings of the Aristotelian Society, 1900-1901.

لا يمكن أن تحتوي القضية على أقل من جزئين . فالحد إذن لفظة مفيدة ، لأنها علامة الاختلاف بين مختلف الفلسفات وكذلك لأننا في كثير من المناسبات نريد أن نتكلم عن « أى » حد أو عن حد « ما » .

٤٨ - ويمكن التمييز في الحلود بين نوعين ساسميهما « أشياء » و « تصورات » على الترتيب . والأولى هي الحلود التي تدل عليها أسماء الأعلام ، والأخرى هي ما تدل عليها جميع الألفاظ الأخرى .

وينبغي أن نفهم هنا أسماء الأعلام بمعنى أوسع بعض الشيء مما هو مألوف . وكذلك الأشياء تؤخذ على أنها تشمل كل شيء خاص مثل النقط ، والحققات ، وأمور أخرى كثيرة لا تسمى عادة أشياء .

وفي التصورات نميز نوعين على الأقل ، وهي ما تعبر عنه الصفات ، وما تعبر عنه الأفعال . وسنسمى النوع الأول في الغالب الأعم محمولات أو فصول تصورات . أما النوع الثاني فيسمى دائماً أو في الأغلب الأعم علاقات (في حالة الأفعال اللازمة تكون الفكرة التي يعبر عنها الفعل معقدة ، وهو عادة يحكم بعلاقة معينة لمترلق غير معين كما في قولك « يتنفس محمد ») .

وقد اتفقنا أنه من الممكن في فصل كبير من القضايا أن نميز ، بطريقة أو أكثر ، بين الموضوع وما يحمل على هذا الموضوع . ويجب أن يحتوي المحمول دائماً على فعل ، وفيما عدا هذا لا يبدوا أن للمحمولات خواص عامة تقوم دائماً بها . ففي القضية العلاقية مثل « ا يكون أكبر من ب » يمكننا أن نعتبر ا هي الموضوع ، « يكون أكبر من ب » هي المحمول ^(١) . أو نعتبر ب هي الموضوع ، « ا يكون أكبر من » هي المحمول . وهكذا نجد أن في هذه الحالات هناك طريقتان لتحليل القضية إلى موضوع ومحمول . وعندما تشمل العلاقة على أكثر من حدين مثل « ا يكون هنا الآن » ^(٢) هناك أكثر من طريقتين

(١) ترجمنا assertion في هذا الموضع بالمحمول ، وقد ترجمناها فيما قبل بالحكم . ولذا لزم التنويه (المترجم) .

(٢) هذه القضية تعنى « ا يكون في هذا المكان في هذا الزمان » . وسنبين في الجزء السابع أن العلامة المصرح بها لا ترد إلى علاقة من حدين .

لإجراء التحليل . ولكن في بعض القضايا لا توجد غير طريقة واحدة وهي القفأ الحمية مثل «سقراط إنساني» والقفأ «الإنسانية لسقراط» وهي تكافئ «سقراط إنساني» فهي حكم يلور على الإنسانية، ولكنها قضية متميزة بذاتها. وفي قولك «سقراط إنساني» نجد أن المعنى الذي تعبر عنه كلمة «إنساني» غير ذلك الذي تعبر عنه عندما نسميها إنسانية، والفرق أنها في الحالة الأخيرة تدور القضية «حول» هذا المعنى، وليس الأمر كذلك في الأولى. وهذا يشير إلى أن إنسانية هي تصور وليس شيئاً. وسأتكلم عن حدود القضية بأنها تلك الحدود، مهما تعددت، الواردة في القفأ والتي يمكن اعتبارها موضوعات لهذه القضية. ومن خصائص حدود القضية أنه يمكن أن نضع أي شيء بدل أي حد من حدود القضية، ومع ذلك نحصل على قضية. وعلى ذلك نقول إن «سقراط إنساني» قضية لها حد واحد فقط، أما ما تبقى من أجزاء القضية فأحدهما هو الفعل يكون والآخر هو المحمول بالمعنى الذي يرد فيه الفعل «يكون» في هذه القضية، لو وضعنا بدلاً من إنسان شيئاً آخر لا يكون محمولاً فلن تكون هناك قضية على الإطلاق. فالمحمولات إذن هي تصورات، غير الأفعال، ترد في قضايا ذات حد واحد أو موضوع واحد. فسقراط شيء لأنه لا يمكن أن يرد غير حد في القضية. ولا يمكن استخدام سقراط ذلك الاستخدام الغريب المزدوج المتضمن في إنساني أو إنسانية. فالنقط، واللحظات، وقطع المادة، والحالات الخاصة للعقل، والموجودات الخاصة بصفة عامة هي أشياء بالمعنى السابق، كما أنه هناك حدود لا وجود لها كالنقط في الهندسة غير الأقليدية، والشخصيات الوهمية في الروايات. وجميع الفصول عندما تؤخذ كحد واحد هي أشياء مثل الأعداد والناس والفراغات. ولكن هذا مبحث سنعرض له في الباب السادس.

وتتميز المحمولات عن الحدود الأخرى بعدد من الخصائص الهامة ومن أهمها صلة هذه المحمولات بما سأسميه «الدلالة». فن المحمول الواحد تنشأ طائفة من

المعاني المتصلة بها. ففضلا عن «إنساني» و«إنسانية» التي لا تختلف إلا من الوجهة النحوية، نجد «إنسان»، «أحد الناس»، «إنسان ما»، «أى إنسان»، «كل إنسان»، «جميع الناس» وجميعها متميزة حقاً الواحدة عن الأخرى. ودراسة هذه المعاني المختلفة حيوى للغاية لكل فلسفة رياضية، وهذا ما يجعل نظرية المحمولات هامة.

٤٩ - وقد يظن أنه ينبغي أن نفرق بين التصور من حيث هو كذلك والتصور المستخدم حداً، كأن نفرق بين يكون والكيونة، وبين إنساني وإنسانية وبين واحد في القضية: «هذا واحد» وبين ١ في «١ هو عدد». ولكن قبول وجهة النظر هذه سيكون من نتيجته أن نفرق في بحر من الصعوبات. وطبعي أن هناك فرقاً نحويًا، وهذا يقابل فرقاً في العلاقات. ففي الحالة الأولى نجد أن التصور المذكور يستخدم على أنه كذلك أى أنه يُحمَل بالفعل على حد، أو يحكم به للربط بين حدين أو أكثر. أما في الحالة الثانية فيقال إن التصور ذاته له محمول أو علاقة. وعلى ذلك فليست هناك صعوبة في تفسير الفرق النحوي. ولكن ما أود بيانه هو أن الفرق في العلاقات الخارجية فقط لا في الطبيعة الذاتية للحدود. فإذا فرضنا مثلاً أن هناك فرقاً بين واحد كصفة وبين ١ كحد، ففي هذه العبارة أخذ «واحد» الصفة على أنه حد. وإذن فإما أن يكون واحد أصبح ١، وفي هذه الحالة يكون هذا الفرض مناقضاً لنفسه، وإما أن هناك فرقاً آخر بين واحد، ١، بالإضافة إلى حقيقة أن الأول يدل على تصور ليس حداً بينما يدل الثاني على تصور هو حد. ولكن هذا الفرض الأخير يقنعني أن تكون هناك قضية حول واحد «كحد»، وعلينا أن نقبل أن القضايا حول واحد كصفة هي غير تلك التي فيها واحد كحد. ومع ذلك فيجب أن تكون جميع القضايا التي من هذا النوع باطلة، لأن قضية حول واحد كصفة تجعل «واحد» هو الموضوع، وتكون إذن حول واحد كحد.

وبالاختصار: إذا كانت هناك صفات لا يمكن جعلها مسميات دون تغيير المعنى، فإن جميع القضايا حول هذه الصفات باطلة (لأنها بالضرورة تحولها إلى حدود). وتكون باطلة كذلك القضية التي تقول إن هذه القضايا

باطلة ، لأن هذا ذاته يحول الصفات إلى مسميات . ولكن هذا 'خلف' .
وهذا الكلام يبين أننا كنا على حق عندما قلنا إن الحدود تشمل كل شيء
يمكن أن يرد في قضية مع احتمال استثناء مجموعات الحدود التي يدل عليها قولك
'أى' أو أية لفظة شبيهة^(١) . لأنه إذا وردت | في قضية فلإنها في هذا النص هي
الموضوع . وقد رأينا أنه إذا حدث ولم تكن | هي الموضوع فلإنها تكون عددياً
وبالضبط نفس | التي ليست موضوعاً في قضية وموضوعاً في قضية أخرى في
نفس الوقت . وبذلك يظهر الخطأ والتناقض في كل نظرية تقول إن هناك صفاتاً
أو توابع أو أشياء مثالية أو بأي اسم تسميها ، أقل مادية أو أقل وجوداً أو أقل
تطابقاً مع نفسها من المسميات الحقة . فالحدود التي هي تصورات تختلف عن
الحدود التي ليست كذلك ، لا بالنسبة إلى قوامها بذاتها ، ولكن لأنها ترد في
بعض القضايا الصادقة أو الكاذبة في شكل يختلف (بطريقة لا يمكن تعريفها)
عن الشكل الذي ترد فيها الموضوعات أو حدودالعلاقات .

٥٠ - وقد يختلف تصوران اختلافاً آخر يمكن أن يسمى تصورياً ، وذلك
علاوة على اختلافهما العددي الذي هو نتيجة اعتبارهما حدين .

ويتميز هذا الاختلاف بأن تصورين إذا وقعا في قضيتين لا كحدين ،
فإن القضيتين حتى إذا كانا متطابقتين من كل وجه آخر ، فلإنهما مختلفان من
من جهة أن التصورين الواقعيين مختلفان تصورياً . والتعدد التصوري يازم عنه
التعدد العددي ولكن العكس ليس صحيحاً ، لأن جميع الحدود ليست تصورات ،
والتعدد العددي كما يدل الاسم هو مصدر الكثرة أما التعدد التصوري فأقل أهمية
بالنسبة للرياضة . ولكن إمكان وضع أحكام مختلفة حول حد معلوم أو مجموعة
حدود يتوقف على التعدد التصوري ، وهو من أجل ذلك أساسى للمنطق العام .

٥١ - وإنه لما لا يخلو من الفائدة أو الأهمية أن نفحص باختصار الصلة
بين المذهب الذي ذكرناه عن الصفات وبين بعض المذاهب التقليدية عن

طبيعة القضايا . وقد جرت العادة على اعتبار أن لجميع القضايا موضوعاً ومحمولاً ، أى أن لها مشاراً إليه مباشراً ، وتصوراً عاماً يرتبط به عن طريق الوصف . ويقول أصحاب هذه النظرية أن وضعها بهذه الكيفية غير دقيق بالمرّة ، ولكنه يكفى ليبيان وجهة النظر التي نحن بصدد بحثها . وهذه النظرية قد اقتضتها حاجة منطقية داخلية في نظرية «برادل» المنطقية، وهي التي تقول إن جميع الألفاظ تدل على أفكار لها ما أسماه برادل « معنى » وأن في كل حكم يوجد شئ ما ، هو الموضوع الحق للحكم ، وهو ليس فكرة وليس له معنى . ويبدو لي أن تحصيل المعنى فكرة غير واضحة مركبة من عناصر منطقية وأخرى نفسية . فجميع الألفاظ ذات معان من جهة أنها رموز تدل على أشياء غير ذاتها . ولكن القضية إذا لم تكن مجرد قضية لغوية ، لا تحتوى بذاتها على ألفاظ ولكنها تحتوى على الموجودات التي تدل عليها الألفاظ وبذلك يكون المعنى في قولك إن للألفاظ معان ، شيئاً غريباً عن المنطق . ولكن هذه التصورات مثل إنسان لها معنى من جهة أخرى . فهي كما لو كانت رموزاً بطبيعة منطقها ، لأن لها الخاصية التي سألها بالدلالة . فحين يرد إنسان في قضية ، مثل قولك : « قابلت إنساناً في الشارع » فإن القضية ليست حول التصور إنسان ، ولكنها حول شئ مختلف تماماً ، حول شئ بالفعل ذى قديم يدل التصور عليه . فالتصورات التي من هذا النوع لها معان غير نفسانية . وعلى هذا النحو إذا قلنا « هذا إنسان » فإننا نتكلم عن قضية فيها تصور غير متصل بنحو ما بما ليس تصوراً ، ولكن عندما نفهم المعنى على هذا النحو فإن الشئ الذي تدل عليه لفظة «جون» لا يكون له معنى كما ذهب إلى ذلك برادل^(١) . وحتى بين التصورات لا نجد معنى إلا لتلك التي لها دلالة . وفي اعتقادي أن هذه الحالة المشوشة ترجع أكثر ما ترجع إلى فكرة أن الألفاظ ترد في القضايا، وهو ما يرجع بدوره إلى الاعتقاد بأن القضايا هي أساساً عقلية، وأنه يجب أن تطابق معارفنا، ولكن هذه الموضوعات هي من موضوعات الفلسفة العامة ولا ينبغي أن نسير في بحثها إلى أبعد من هذا في هذا الكتاب .

٥٢ - بقی أن ندرس الفعل ، وأن نجد علامات تميزه عن الصفة . وهناك بالنسبة للأفعال كذلك صيغتان نحويتان تقابلان فرقاً في مجرد العلاقات الخارجية . فهناك الصيغة التي للفعل كفعال (ونترك هنا تصريح هذه الصيغة) . وهناك اسم الفعل الذي يعبر عنه بالمصدر ، أو اسم الفاعل . والفرق هو كل الفرق بين قولك « زيد قتل عمراً » وقولك « القتل ليس اغتيالاً » . وتحليل هذا الفرق تظهر طبيعة الفعل وعمله .

وواضح أن التصور الواضح في اسم الفعل هو بذاته الواقع في الفعل . وهذا ينتج عن بحثنا السابق من أن كل جزء من كل قضية ينبغي أن يكون من الممكن جعله موضوعاً منطقياً . وإلا وقعنا في خلط . فإذا قلنا إن « يقتل لا تعني نفس ما يعنيه القتل » نكون قد جعلنا « يقتل » موضوعاً . ولا يمكن القول إن التصور الذي تعبر عنه لفظة يقتل لا يمكن أن يكون موضوعاً . وكذلك نرى أن نفس الفعل الذي يقع فعلاً يمكن أن يقع موضوعاً . والسؤال هو : ما الفرق المنطقي الذي يعبر عنه الفرق في الصيغة النحوية . وواضح أن الفرق يجب أن يكون فرقاً في العلاقات الخارجية ، ولكن هناك أمراً آخر بالنسبة للأفعال . فعند تحويل الفعل ، كما يرد في قضية ، إلى اسم فعل ، يمكن تحويل القضية كلها إلى موضوع منطقي واحد ، لم يعد حكماً ، ولم يعد يشتمل في نفسه على صدق أو كذب . وهنا كذلك لا يبدو من الممكن التمسك بأن الموضوع المنطقي الناتج هو شيء مغاير للقضية . ونوضح هذا بالعبارتين « مات قيصر » ، « موت قيصر » فإذا سألنا ماذا نقرر في القضية « مات قيصر » فالجواب « موت قيصر هو الذي يحكم به » . ففي تلك الحالة يبدو أن موت قيصر هو الذي يحتمل الصدق والكذب . ومع ذلك فلا الصدق ولا الكذب يتعلق بموضوع منطقي . ويبدو أن الجواب هنا أن موت قيصر له علاقة خارجية بالصدق أو الكذب (كيفما يكون الحال) . بينما « مات قيصر » تحمل في طياتها صدقها أو كذبها كعنصر من عناصرها . ولكن إذا كان هو هذا التحليل الصحيح فن العسير

أن نرى كيف تختلف « مات قيصر » عن « صدق موت قيصر » في حالة الصدق ، ولا عن « كذب موت قيصر » في حالة الكذب . ومع ذلك فإنه واضح تماماً أن العبارة الأخيرة على الأقل لا تكافئ بالمرّة قولك « مات قيصر » ويظهر أن هناك فكرة أولية للحكم تؤخذ من الفعل ، وتضيق هذه الفكرة عند تحويله إلى اسم فعل كما تضيق عندما نجعل القضية التي نحن بصدددها موضوعاً لقضية أخرى . وهذا لا يتوقف على الصيغة النحوية . لأنّ إذا قلت « مات قيصر » هي قضية ، فأنا لا أحكم بأن قيصراً قد مات بالفعل ، وبذلك ينحني عنصر كان موجوداً في قولك « مات قيصر » . ويظهر أن التناقض الذي أردنا تحاشيه والخاص بالشئ الذي لا يمكن أن يكون موضوعاً منطقياً ، قد أصبح لا مناص منه . ولست أدري كيف أعالج هذه الصعوبة علاجاً مقبولاً ، ويظهر أنها متعلقة بطبيعة الصدق والكذب ذاتها . وقد يكون أوضح طريق أن نقول إن الفرق بين القضية المحكوم بها ، والقضية غير المحكوم بها ليس فرقاً منطقياً ، ولكنه نفساني . ولا شك أن هذا صحيح إذا كان من الممكن الحكم في القضايا الكاذبة . ولكن هناك نوعاً آخر من الحكم ، يصعب جداً تقريره بوضوح للعقل ، ومع ذلك لا يمكن إنكاره ، وهو القضايا الصادقة فقط التي يحكم فيها . فالقضايا الصادقة والباطلة على السواء هي من بعض الوجوه أشياء ، ويمكن أن تكون موضوعات منطقية ، ولكن عندما يحدث أن تكون القضية صادقة تكون لها خاصية أخرى فوق تلك التي تشترك فيها مع القضايا الكاذبة ، وهذه الخاصية هي ما أعنيه عند الكلام عن الحكم بالمعنى المنطقي على أنه مغاير للمعنى النفساني . ولكن طبيعة الصدق ليست متعلقة بمبادئ الرياضة بأكثر مما هي متعلقة بكل شيء آخر . وعلى ذلك فسأترك هذا السؤال للمناطق مكتفياً بالإشارة السابقة المختصرة إلى هذه الصعوبة .

٥٣ - وقد نتساءل أكل شيء من وجهة النظر المنطقية التي تهتمنا إذا كان فعلاً فهو يعبر عن علاقة أو لا . ويبدو من الواضح أننا لو كنا محققين في اعتبار

«سقراط هو إنسان»^(١) قضية ذات حد واحد فقط ، فإن «هو» في هذه القضية لا يمكن أن تعبر عن علاقة بالمعنى المعتاد . وفي الواقع تتميز القضايا الجملية بهذه الصفة التي لا تعبر عن علاقة . ومع ذلك فلا بد أن هناك علاقة متضمنة بين سقراط والإنسانية ، ومن الصعب أن نتصور أن القضية لا تعبر عن علاقة . وقد يكون في الإمكان أن نقول إنها علاقة ، متميزة عن غيرها من العلاقات بأنها لا يمكن أن تعتبر حكماً متعلقاً بأي من حدّيها بدون تمييز ولكنها حكم على المتعلق به . ويمكن تطبيق نفس الكلام على القضية « ا يكون » التي تتعلق بكل حد دون استثناء . و«يكون» هنا مختلفة تمام الاختلاف عن « يكون » في قولك « سقراط إنسان » (في اللغة الإنجليزية) ويمكن اعتبارها مركبة وعلى أنها في الحقيقة تحل الكينونة على ا وهذه الطريقة يمكن اعتبار الفعل المنطقي الصحيح في قضية على أنه يقرر دائماً علاقة . ولما كان من الصعب أن نعرف بالضبط المقصود بالعلاقة فإن هناك خطراً أن تصبح المسألة كلها مسألة لفظية .

٥٤ - وإذا سلمنا بأن جميع الأفعال هي علاقات ، أمكن أن يظهر من طبيعة الفعل المزدوجة ، - الفعل كفعل ، والفعل كاسم الفعل - على أنها الفرق بين العلاقة في حد ذاتها ، والعلاقة التي تربط في الواقع . خذ مثلاً قولك « ا تختلف عن ب » وعند تحليل هذه القضية نجد أن أجزائها هي ا واختلاف و ب فقط . ومع ذلك فإن هذه الأجزاء إذا وضعت جنباً إلى جنب لا تتكون منها القضية مرة ثانية . فالاختلاف الوارد في القضية يربط فعلاً بين ا ، ب بينما الاختلاف بعد التحليل هو فكرة لا صلة له بكل من ا ، ب . ويقال إنه كان ينبغي عند التحليل أن نذكر العلاقة القائمة بين اختلاف وبين ا ، ب وهي العلاقات التي يعبر عنها «يكون» ، عند ما نقول « ا مختلفة عن ب » (في الصيغة الإنجليزية). وهذه العلاقات تتكون من أن ا متعلق به وأن ب متعلق بالنسبة

(١) في الأصل الإنجليزي is في العبارة Socrates is a man وستترجم الرابطة بمد قليل
بلفظة « يكون » (المترجم)

لكلمة اختلاف . ولكن ا متعلق به ، اختلاف ، هي أيضاً مجرد حدود قاسمة وليست قضية . فالقضية هي في الواقع أساساً وحدة ، وعندما يهدم التحليل هذه الوحدة ، فإن مجرد سرد الأجزاء لا يعيد بناء القضية . فالفعل عندما يستخدم كفعل يحمل في طياته وحدة القضية ، وبذلك يتميز عن الفعل الذي نعتبره حدا . ومع ذلك فلست أدري كيف أستطيع أن أعطي صورة واضحة مضبوطة عن طبيعة هذا التمييز .

٥٥ — وقد نتساءل عما إذا كان التصور العام « اختلاف » وارداً حقاً في القضية « ا تختلف عن ب » أم أن هناك اختلافاً بين ا ، ب واختلافاً نوعياً آخر بين ب ، ج وهما ما تقرره في « ا تختلف عن ب » و « ب تختلف عن ج » وبهذه الطريقة يصبح « اختلاف » فصل تصور له من الحالات الخاصة بقدر ما له في الحدود المختلفة من أزواج . أما الحالات الخاصة فيمكن أن يقال عنها بالتعبير الأفلاطوني أنها تشترك في طبيعة الاختلاف . ولما كانت هذه المسألة حيوية بالنسبة لنظرية العلاقات فيحسن أن نقف عندها قليلاً . إنما ينبغي أن أشير — بادی ذی بدء — أنني عندما أقول « ا تختلف عن ب » فإنني أقصد مجرد الفرق العددي الذي يسببه ما اثنان ، لا الاختلاف في هذا الأمر أو ذاك .

ولنجرب الآن افتراض أن اختلافاً معيناً هي فكرة مركبة من اختلاف ، ومن صفة خاصة تميز اختلافاً خاصاً عن كل اختلاف خاص آخر . وطالما كنا معنيين بعلاقة الاختلاف ذاتها فلا يمكن التمييز بين الحالات المختلفة ، ولكن علينا أن نفترض أنه توجد صفات مختلفة متعلقة بالحالات المختلفة . ولما كانت الحالات تتميز بملحودها فإن الصفة يجب أن تتعلق أصلاً بالحدود لا بالاختلاف . فإذا لم تكن الصفة علاقة فلا يمكن أن تكون لها صلة خاصة بالاختلاف بين ا ، ب الذي أريد تمييزه عن مجرد الاختلاف ، وإذا لم تنجح في ذلك تصبح عديمة الفائدة . ومن جهة أخرى إذا كانت هناك علاقة أخرى بين ا ، ب

أسمى من علاقة الاختلاف كان علينا أن نسلم أن هناك علاقتين بين أى حدين ، اختلاف ، واختلاف نوعي ، وهذا الأخير غير قائم بين أى حدين آخرين . ووجهة النظر هذه تجمع بين وجهتين أخريين : تقول الأولى إن العلاقة العامة المجردة للاختلاف ذاتها تقوم بين ا ، ب ، وتقول الثانية : إنه عندما يختلف حدان فإن لهما ، نتيجة لهذه الحقيقة ، علاقة اختلاف نوعية ، فريدة ، لا يمكن تحليلها ولا يشترك فيها أى زوج آخر من الحدود . ويمكن قبول أى وجهة من وجهتي النظر هذه دون إنكار أو إثبات لوجهة النظر الأخرى . ولنتظر الآن فيما يمكن أن يقال في صالح كل منهما ، وما يمكن أن يقال ضدما .

فما يؤخذ على فكرة الاختلاف النوعية ، أنه لو اختلفت الاختلافات فإن اختلافاتها فيما بينها يجب أن تختلف أيضاً ، وبذلك تقع في تسلسل لا نهاية له . والذين يعترضون على العمليات التي لا نهاية لها يرون في هذا برهانا على أن الاختلافات لا تختلف . ولكننا نسلم في هذا الكتاب بأن ليس هناك تناقض خاص بفكرة اللانهاية ، وأنه لا يمكن الاعتراض على العملية التي لا تنهى إلا إذا نشأ هذا الاعتراض من تحليل المعنى الواقعي لقضية ما . والحالة التي نحن بصدددها هي حالة لزوم وليست حالة تحليل ، وعلى ذلك فهي مما لا اعتراض عليه .

وما يؤخذ على فكرة قيام علاقة الاختلاف المجردة بين ا ، ب هو الحجة المشتقة من تحليل « ا يختلف عن ب » والتي أدت إلى هذا البحث . ونلاحظ أن الفرض الذي يجمع بين الاختلاف العام والاختلاف النوعي يفترض وجود قضيتين متميزتين إحداهما تقرر الاختلاف العام ، والثانية تقرر الاختلاف النوعي . فلماذا لم يكن بين ا ، ب اختلاف عام فإن هذا الفرض يكون مستحيلاً . وقد رأينا كيف ضاع عبثاً كل مجهود لتجنب قصور التحليل بأن جعلنا معنى « ا يختلف عن ب » يتضمن علاقات الاختلاف بين ا ، ب . وهذه المحاولة تؤدي في الواقع إلى عملية لا نهاية لها ولا يمكن قبولها ، لانه علينا أن نضمن

العلاقات للعلاقات المذكورة لكل من ا ، ب واختلاف ، وهكذا ، وعلى هذا النحو المتزايد التعقيد نفترض أننا نحلل معنى قضيتنا الأصلية . وهذا البحث يثبت أمراً غاية في الأهمية وهو أنه عندما تقوم علاقة بين حدين ، فإن علاقات هذه العلاقة بالحدين وعلاقة هذه العلاقات بالعلاقة وبالحدود وهكذا إلى ما لا نهاية له ، ليست جزءاً من معنى هذه القضية ، مع أنها جميعاً تلزم عن القضية التي تقرر العلاقة الأصلية .

ولكن هذا الكلام لا يكفي لإثبات أن العلاقة بين ا ، ب لا يمكن أن تكون اختلافاً مجرداً . وبقيت وجهة النظر القائلة أن لكل قضية نوعاً من الوحدة التي لا يمكن أن يبقى عليها التحليل بل يهدمها ، حتى لو ذكر في التحليل أنها عنصر من عناصر القضية . وما لا شك فيه أن لوجهة النظر هذه صعوباتها . ولكن وجهة النظر الأخرى القائلة بأنه لا يمكن أن يكون لزوجين من الحدود نفس العلاقة لها أيضاً صعوباتها الخاصة ، وتقصر عن حل المسألة التي وضعت من أجلها . لأنه حتى لو كان الاختلاف بين ا ، ب خاصاً تماماً بـ ا ، ب فإن الحدود الثلاثة ا ، ب ، اختلاف ا عن ب لا تعيد تكوين القضية « ا يختلف عن ب » مثلها في ذلك مثل ا ، ب ، اختلاف — ويبدو واضحاً أنه حتى إذا اختلفت الاختلافات فإنه لا بد أن يكون بينها شيء مشترك . ولكن أهم طريقة يمكن بها أن يكون لحدين شيء مشترك هي أن يكون ل كليهما علاقة بمحد معلوم . وعلى ذلك فإذا لم يكن لزوجين اثنين من الحدود نفس العلاقة فإنه لا يمكن أن يكون لحدين شيء مشترك ، ولا يمكن أن تكون الاختلافات المختلفة ، في أي معنى يمكن تعريفه ، حالات خاصة من الاختلافات ^(١) . ونصل إذن إلى أن العلاقة المقررة بين ا ، ب في القضية « ا تختلف عن ب » هي علاقة الاختلاف

(١) يظهر أن الحجة المذكورة تثبت أن نظرية مور عن الكليات ذات الأشلة المتعددة والتي ذكرها في بحثه من التطابق Proceedings of the Aristotelian Soc. 1900-1901 لا يجب أن تطبق على جميع التصورات . وعلاقة الفرد بالكل الداخلة فيه يجب على كل حال أن يكون فعلاً وطعناً للفرد نفسه في جميع الأحوال التي يقع فيها .

العامة ، وهى ذاتها بالضبط ومن الوجهة العددية نفس العلاقة المقررة بين ح ،
 د فى القضية « ح تختلف عن د » . ويجب أن نسلم أن وجهة النظر هذه ،
 ولنفس الأسباب ، صحيحة لجميع العلاقات الأخرى ، فالعلاقات ليست لها
 حالات خاصة ، ولكنها هى ذاتها بالضبط فى جميع القضايا التى تدخل فيها .
 ونلخص الآن النقط الرئيسية التى برزت فى كلامنا عن الفعل . فقد رأينا
 أن الفعل هو تصورٌ، مثله فى ذلك مثل الصفة ، يمكن أن يحصل فى قضية
 دون أن يكون أحد حدودها ، مع أنه يمكن أيضاً أن يصبح موضوعاً منطقياً .
 وفى كل قضية يجب أن يدخل فعل واحد فقط كفعل ، على أن كل قضية
 يمكن تحويلها إلى موضوع منطقى مفرد بتحويل فعلها إلى اسم فعل . وسأسمى
 هذا النوع من الموضوع المنطقى تصور قضية . وكل فعل ، بالمعنى المنطقى
 للكلمة ، يمكن اعتباره علاقة . فهو يربط فعلاً عندما يدخل كفعل ، وعندما
 يدخل كاسم فعل فإنه يستند مجرد العلاقة مستقلة عن الحدود . والأفعال ، على
 عكس الصفات ، ليست لها حالات خاصة ، ولكنها متطابقة فى جميع أحوال
 ورودها . وبفضل الطريقة التى يؤدى بها الفعل فعلاً تعليق حدود القضية ،
 فلكل قضية وحدة تجعلها متميزة عن مجموع أجزائها . وكل هذه النقاط تجر
 إلى مسائل منطقية تستحق أن تبحث بحثاً وافياً فى مؤلفات علم المنطق .

أما وقد وضعنا صورة عامة عن طبيعة الأفعال والصفات فسنبحث فى البابين
 القادمين فى مناقشات تنشأ من النظر فى الصفات ، وفى الباب السابع فى تلك التى
 تدور حول الأفعال . ويمكن القول بصفة عامة أن الفصول متصلة بالصفات ،
 وأن دوال القضايا تتضمن الأفعال . وهذا هو السبب الذى حدا بنا إلى الإفاضة
 فى موضوع يبدو لأول وهلة بعيداً نوعاً ما عن مبادئ الرياضيات .

الباب الخامس

الدلالة

٥٦ — إن معنى الدلالة ، شأنه شأن كثير من الأفكار المنطقية ، قد طمس في الماضي بخلطه خلطاً غير مناسب بعلم النفس . وعندما نشير أو نصف أو نستخدم الألفاظ كرموز للتصورات فإننا ندل بشكل من الأشكال ، ولكنه ليس الشكل الذى أنوى بحثه فيما يلى . وما يجعل الوصف ممكناً — أى أننا نستطيع باستخدام التصورات أن نعين شيئاً هو فى ذاته ليس تصوراً — وجود علاقة منطقية بين بعض التصورات وبعض الحلود . وبفضل هذه العلاقة تدل هذه التصورات بشكل طبيعى ومنطقى على هذه الحلود . وهذا المعنى من الدلالة هو موضوع بحثنا هنا .

وهذا المعنى هو (فى نظرى) أساس جميع نظريات الجوهر ، ومنطق الموضوع والمحمول ، كما أنه أساس التقابل بين الأشياء والأفكار ، وبين الفكر الاستدلالى والإدراك المباشر . ويبدو لى أن معظم هذه الاتجاهات المختلفة خاطئ ، بينما الحقيقة الأساسية ذاتها التى نشأت عنها هذه الاتجاهات قلما بحثت بحثاً منطقياً بحثاً .

والتصور «يدل» إذا ورد فى قضية ، ولا تكون القضية «حول» التصور ، ولكنها تدور حول حد متصل بطريقة خاصة بهذا التصور . فإذا قلت «لقد قابلت رجلاً» فالقضية ليست حول «رجلاً» فهذا تصور لا يمشى فى الشارع ، ولكنه يعيش فى طيات كتب المنطق . فالذى قابلته كان شيئاً وليس تصوراً ، كان رجلاً واقعياً له حائك ملابس ، وحساب فى المصرف ، ومنزل ، وزوجة . وكذلك القضية «أى عدد متناه فهو فردى أو زوجى» هى قضية من الواضح أنها صادقة ، بينما

التصور « أى عدد متناه » ليس فرداً أو زوجاً . فالأعداد الخاصة هي التي تكون فردية أو زوجية ، ولا يوجد فضلاً عنها شيء آخر ، أى عدد يمكن أن يكون زوجياً أو فردياً ، وإذا وجد فإنه من الواضح أنه لا يمكن أن يكون فردياً ولا أن يكون زوجياً . فإذا تكلمنا عن التصور « أى عدد » فإننا نجد أن جميع القضايا تقريباً التي تشتمل على العبارة « أى عدد » هي قضايا كاذبة . وإذا أردنا الكلام عن التصور وجب أن نبين هذه الحقيقة بشكل خاص في المطبعة أو باستخدام الأقواس . وكثيراً ما يقول الناس إن الإنسان فان ، ولكن كل ما هو فان سيموت ، ومع ذلك فن العجيب حقاً أن نطالع في جريدة صباحية الإعلان التالي : توفي في مسكنه بشوارع كيت بمدينة كيت في الثامن عشر من شهر يونيو عام ١٩٠٠ - ، والانسان أكبر أنباء الموت والخطيئة . ففي الواقع الإنسان لا يموت ؛ فإذا كان القول « الإنسان فان » قضية حول الإنسان لوجب أن تكون كاذبة . الواقع أن القضية حول الناس . وهنا أيضاً ليست القضية حول التصور « الناس » ، ولكنها حول مايدل عليه هذا التصور . وجميع نظريات التعريف ، والتطابق ، والفصول ، والرمزية والمتغير ، كلها مطوية في نظرية الدلالة . والفكرة أساسية في المنطق ، ورغم صعوبتها فإن من الأمور الجوهرية أن نكون صورة واضحة عنها ما أمكن ذلك .

٥٧ - ويمكن أن نحصل على فكرة الدلالة كنوع من التوالد المنطقي من قضايا الموضوع والمحمول - وهي التي يظهر أنها تتوقف عليها إلى حد ما . وأبسط القضايا هي تلك التي تحتوي على محمول واحد لا كحد ، وتحتوي على حد واحد يسند إليه المحمول المذكور . ومثل هذه القضايا يطلق عليها اسم قضايا الموضوع - المحمول . والأمثلة على ذلك | هو ^(١) ، و | هو واحد ، و | هو إنساني . والتصورات التي هي محمولات يمكن أن تسمى فصول تصورات لأن الفصول تنشأ منها ، ولكننا سنجد من الضروري أن نميز بين كلمتي محمول وفصل تصور . والقضايا التي من النوع « موضوع - محمول » دائماً يلزم عنها وتلزم عن قضايا من ذلك النوع الذي يقرر أن الفرد تابع لفصل . وعلى ذلك تكون الأمثلة السابقة مكافئة

(١) | هو تقابل في الإنجليزية A is [المترجم] .

١ : أى شىء ، أى الوحدة ، الإنسان . وهذه القضايا الجديدة ليست مطابقة للسابقة ، لأن لها صورة مخالفة مخالفة كلية للصورة الأولى . فأولاً نجد أن «هى» هنا ^(١) عبارة عن التصور الوحيد الذى لا يستخدم كحد . كذلك سنجد أن إنساناً لا هى التصور ولا الحد ولكنها خليط خاص من حدود خاصة وهى تلك الحدود التى نسميها إنسانية . وعلاقة سقراط : «إنسان» مختلفة تماماً عن علاقته بالإنسانية ، فى الواقع يجب النظر إلى «سقراط إنسانى» لاعلى أنها حكم على علاقة بين سقراط والإنسانية ، لأن وجهة النظر هذه تجعل «إنسانى» ترد كحد فى «سقراط إنسانى» . حقاً أنه عمالاً ينكر أن علاقته بالإنسانية تلزم عن «سقراط إنسان» وهى العلاقة التى يعبر عنها فى «سقراط له إنسانية» وهذه العلاقة بالعكس تلزم عنها قضية الموضوع المحمول . ولكننا نستطيع التمييز بين القضيتين تمييزاً واضحاً ، ومن المهم فى نظرية الفصول أن نفعل ذلك . فلدينا فى حالة كل عمول ثلاثة أنواع من القضايا تستلزم الواحدة منها الأخرى وهى : «سقراط إنسانى» و «سقراط له إنسانية» و «سقراط إنسان» فالقضية الأولى تشمل على حد ومحمول ، والثانية على حدين وعلاقة (الحد الثانى مطابق لمحمول القضية الأولى ^(٢)) بينما تشمل القضية الثالثة على حد وعلاقة وما سأميحه انفه الا (وهو اصطلاح سأشرحه بعد قليل) ^(٣) .

ولا يختلف فصل التصور إلا قليلاً أولاً يختلف أصلاً عن المحمول . ولكن الفصل باعتباره مقابل فصل التصور فهو ما اجتمع من جميع الحدود التى لها المحمول المعلوم . فالعلاقة الواردة فى النوع الثانى «سقراط له إنسانية» تتميز كلية بأنه يلزم عنها وتلزم عن قضية ذات حد واحد ، أما الحد الثانى من حدود

(١) فى الأصل الإنجليزى is ، وذلك فى العبارة "A is a-man" (المترجم)

(٢) انظر بند ٤٩ .

(٣) هناك قضيتان يعبر عنها بنفس الألفاظ ، وهما "Socrates is a-man" و "Socrates is-a man" ;

والملاحظات الواردة فى المتن تنطبق على القضية الأولى ، وفيما بعد ، إلا إذا أشرنا إلى العكس بعلامة خاصة ، فالمقصود هو القضية الثانية . والأولى تميز عن تطابق سقراط وفرد غامض ، أما الثانية فإنها تميز من علاقة سقراط بفصل التصور إنسان [المؤلف] (المترجم - ولم نقل القضيتين إلى العربية)

العلاقة فيها فقد أصبح محمولاً . فالقصل مجموعة خاصة من الحدود ، وفصل التصور ذو صلة وثيقة بالمحمول ، ويحدد فصل التصور الحدود التي يجمعها الفصل . فالمحمولات ، من وجهة نظر معينة ، أبسط أنواع التصورات ، لأنها تدخل في أبسط أنواع القضايا .

٥٨ - ويرتبط بكل محمول عدد كبير من التهورات المتصلة به اتصالاً وثيقاً . وهي تصورات من المهم أن نميز بينها في الحالات التي تكون فيها متميزة عن بعضها البعض . فإذا بدأنا مثلاً بإنساني فلدينا إنسان ، وناس ، وجميع الناس ، وأى إنسان ، والجنس البشرى ، وجميعها ما عدا الأول لها معنى مزدوج ، أى تصور دال وموضوع مدلول عليه . كذلك لدينا « إنسان وإنسان ماً » وهما يدلان على أشياء غير ذاتهما . وينبغى أن نذكر دائماً هذا الجهاز الواسع المتصل بالمحمول ، كما ينبغى أن نحاول تحليل جميع الأفكار السابقة . ولكننا في الوقت الحاضر سنغنى بخاصية الدلالة أكثر من عنايتنا بالتصورات المختلفة الدالة .

واقتران التصورات لكي تكون تصورات جديدة أكثر تعقيداً من مركباتها موضوع قال عنه الذين كتبوا عن المنطق الشيء الكثير . أما اجتماع الحدود لكي تكون ما يمكن أن يسمى - من باب التمثيل - حدوداً مركبة ، فهو موضوع لم يتحدث لنا عنه المناطقة - حديثهم وقديمهم - إلا القليل النادر ، مع أن الموضوع ذو أهمية حيوية بالنسبة لفلسفة الرياضيات ، نظراً لأن طبيعة العدد والمتغير على السواء تلور حول هذه النقطة . وتتميز الرياضة بست من الألفاظ التي نستخدمها في حياتنا اليومية ؛ وهذه الألفاظ هي : جميع ، كل ، أى ، وأداة التنكير ، وبعض ، وأداة التعريف الـ . ولكي يستقيم التفكير الصحيح ينبغى أن نميز بين هذه الألفاظ بشكل واضح ، ولكن هذا الموضوع يعرج بالصعوبات ، وقد أهمله المناطقة إهمالاً يكاد يكون تاماً .

ونلاحظ أول الأمر أنه من الواضح أن كل عبارة تشتمل على إحدى هذه الألفاظ الست فإنها تدل دائماً . ومن المفيد في بحثنا الحاضر أن نميز بين

فصل التصور وبين المحمول. وسأسمى «إنسانى» محمولاً و«إنسان» فصل التصور وإن كان الفرق لفظياً فقط . وخصائص فصل التصور التى تميزه عن الحدود عامة هى أن «س هى و» دالة قضية عندما تكون و فصل تصور ، ولا تكون دالة قضية إلا فى هذه الحالة فقط . ويجب أن نسلم بأنه عندما لا تكون و فصل تصور لا نحصل على قضية كاذبة ، بل لا نحصل على القضية بالمرّة مهما أعطينا س من قيم . وهذا يمكننا من تمييز فصل تصور يتّمس لفصل صفرى فيه جميع القضايا من النوع السابق كاذبة ، عن حد ليس فصل تصور بالمرّة ليس فيه قضايا من النوع السابق . وهو كذلك يوضح أن فصل التصور ليس حداً فى القضية «س هى و» لأن تغير و مقيد إذا أردنا أن تبقى الصيغة قضية : و يمكننا أن نقول الآن : إن العبارة الدالة تتكون دائماً من فصل تصور مسبوق بإحدى الألفاظ الست السابقة أو بمترادف لإحداها .

٥٩ — والسؤال الذى يصادفنا أول كل شيء بالنسبة للدلالة هو : أهناك طريقة واحدة للدلالة على ست أنواع مختلفة من الأشياء ، أم أن طرق الدلالة مختلفة ؟ وفى الحالة الثانية : هل الشيء المدلول عليه هو ذاته فى جميع الحالات الست أم أن الشيء يختلف كما تختلف الطريقة الدالة عليه ؟ ولكى نتمكن من الإجابة على هذا السؤال ينبغى أن نشرح الفروق القائمة بين هذه الألفاظ الست المذكورة . وهنا يحسن أن نترك جانباً لفظة ال (أداة التعريف) فى أول الأمر ، لأن هذه اللفظة لها مركز مخالف لمركز الباقى ، وهى خاضعة لقيود لا تخضع لها الألفاظ الأخرى .

وفى الحالات التى يكون فيها الفصل المعروف لفصل التصور مكوناً من عدد متناهٍ من الحدود يمكن أن نحذف فصل التصور كلية ، ونبدل على مختلف الأشياء المدلول عليها بتعداد الحدود ، وربطها بواسطة أداة العطف «و» أو «أو» كيفما يكون الحال . ومن المفيد أن نزل جزءاً من المشكلة إذا نظرنا أولاً فى هذه الحالة ولو أن

تصور اللغة يجعل من الصعب إدراك الفرق بين الأشياء التي تدل عليها نفس الصيغة من الألفاظ .

والآن دعنا نبدأ باعتبار حدين اثنين فقط مثلاً زيد وخالد ، فالأشياء الدالة عليها جميع ، كل ، أى ، أداة التفكير ، وبعض على الترتيب متمثلة في القضايا الخمس الآتية :

(١) زيد وخالد هما اثنان من خطاب ليلي . (٢) زيد وخالد يعشقان ليلي : (٣) إذا كان من قابلتُ زيدا أو خالدا فقد قابلت عاشقاً . (٤) لو كان واحداً من خطاب ليلي فلا بد أنه زيد أو خالد . (٥) ليلي ستزوج زيدا أو خالداً . ومع أن هذه القضايا لا تتضمن سوى صورتين اثنتين هما زيد وخالد ، زيد أو خالد ، إلا أن هناك ، في نظري ، خمس صور مختلفة لما اجتمع من هاتين الكلمتين ، ونستطيع أن نبرز الفروق الدقيقة بين هذه الصور بما يأتي :

في القضية الأولى: زيد «و» خالد هما اثنان ، ولا يصدق ذلك على أيهما على افراد ، ومع ذلك فليس كل ما اجتمع من زيد وخالد هو الاثنان ، لأن هذا هو واحد فقط . فالعدد اثنان هو جمع حقيقي من زيد مع خالد ، وهو من نوع الاجتماع الذي يميز الفصول كما سيأتى في الباب القادم . وأما في القضية الثانية على العكس فإن ذلك الذى أثبتناه صحيح بالنسبة لزيد وبالنسبة لخالد على افراد . فالقضية تساوى ولو أنها لا تطابق «زيد يعشق ليلي وخالد يعشق ليلي» وعلى ذلك فالربط بواو العطف ليس شأنه هنا شأنه في القضية الأولى . فالقضية الأولى معنيةً بكليهما مجتمعين ، أما القضية الثانية فعنية بكليهما منفردين أى كل أو كل واحد منهما . ويميز بين الحالتين بالكلام عن الأولى على أنه عطف عددي ، لأن ما ينتج عنها هو عدد ، ونسمى الثانية اتصال قضايا لأن القضية التي تدخل فيها تساوى اتصالاً بين قضايا . (وما تجب ملاحظته أن اتصال القضايا الذي نحن بصدده هو من نوع مختلف تماماً عن كل أنواع الجمع

الذى تكلمنا عنه فهو فى الواقع من النوع المسمى حاصل الضرب المنطقى .
فالقضايا تجمع على أنها قضايا لا على أنها حلول .

والقضية الثالثة توضح نوع العطف الذى يُعرف بواسطة لفظة «أى» . وهناك بعض الصعوبة حول هذه الفكرة التى تبدو وكأنها فى منتصف الطريق بين العطف والانفصال . ويمكن توضيح ذلك كما يأتى : ليكن A ، B قضيتين مختلفتين ، كل منهما يلزم عنها قضية ثالثة C . وإذن فالانفصال « A أو B » يلزم عنه C . والآن ليكن A ، B قضيتين تسندان نفس المحمول لموضوعين مختلفين ، وإذن فهناك موضوعان يمكن أن يسند إليهما المحمول وبحيث تكون القضية الناجمة مساوية للانفصال « A ، B » . ولنفرض مثلاً أننا نستنتج من ذلك أنك « إذا قابلت زيدا أو قابلت خالدا فقد قابلت عاشقا هائما » قلنا : « إذا قابلت زيدا فقد قابلت عاشقا هائما » و « إذا قابلت خالداً فقد قابلت عاشقا هائما » وأتينا نعتبر هذا مساوياً لقولك « إذا قابلت زيدا أو خالداً إلخ إلخ » فالربط بين زيد وخالد هنا هو ما يمكن أن يدل عليه أى واحد منهما . وهذا يختلف عن الانفصال بأنه يلزم عن ويلزم عنه العبارة التى تشملهما معاً ولكن هذا اللزوم المتبادل لا يقدم فى بعض الأمثلة المعقدة . فالجمع هنا فى الواقع يختلف عما يُدل عليه بلفظة « كلا » ، وهو يختلف عن صورتى الانفصال . وسأسميه العطف المتغير . والصورة الأولى للانفصال هى ما يظهر فى (٤) وهذه هى الصورة التى سأدل عليها بخطاب . فهنا التسليم بأن الأمر متعلق حقاً بزيد أو بخالد إلا أنه ليس صحيحاً أن خالد هو الذى كان خاطباً أو أن زيدا هو الذى كان . فالقضية ليست مساوية لانفصال القضيتين « لا بد أنه كان زيد أولاد أنه كان خالداً » فالقضية فى الواقع لا يمكن التعبير عنها بانفصال أو باقتران قضيتين إلا عن طريق ملتو كالآتى :

« إذا لم يكن زيدا فقد كان خالداً ، وإذا لم يكن خالداً فقد كان زيدا »
وهى صورة لا تطاق إذا زاد عدد الحلول على حدين ، وتصبح غير مقبولة من

الناحية النظرية إذا صار عدد الحدود لا نهائياً . ويكون هذا الانفصال إذن دالاً على حد متغيراً ، أى أن أى هذين الحدين قصدنا فإن الانفصال لا يدل على هذا الحد ، ومع ذلك فهو يدل على واحد من هذين الحدين أو على الآخر . وهذا ما أسميه تبعاً لذلك بالانفصال المتغير . وأخيراً فالنوع الثانى من الانفصال هو الموضح فى (٥) وهوما أسميه الانفصال الثابت ، لأننا هنا نقصد زيداً أو نقصد خالداً ، ولكننا لا نقرر أى الاحتمالين هو الواقع . بمعنى أن القضية تساوى انفصال قضيتين : « ستروج لى زيداً أو ستروج خالداً » فهى ستروج واحداً بالذات من الاثنين . ويدل الانفصال على واحد بالذات من بينهما ، علماً بأنه يمكن أن يدل على أى واحد منهما . وبذلك تكون جميع الحالات الخمس مختلفة بعضها عن بعضها الآخر .

وبما نتج ملاحظته أن هذه الحالات الخمس لا تنتج حدوداً ولا تصورات وإنما تنتج فقط مجموعات من الحدود . فالأولى تنتج حدوداً كثيرة ، أما الحالات الباقية فينتج عنها شئ خاص لا هو بالحد الواحد ولا بالحدود الكثيرة . فالارتباطات هى ارتباطات بين الحدود دون استخدام علاقة ما . وعلى الأقل فى الحالة التى يكون فيها الحدان المرتبطان فصلاً نجد أن كل رابطة يقابلها تصور محدد تماماً يدل على مختلف حدود المجموعة مرتبطة بالطريقة الخاصة . ولكى نوضح هنا دعنا نعيد التمييز السابق فى الحالة التى لا تكون فيها الحدود المرتبطة محصاة كما هو الحال فيما سبق ، وإنما تكون معرفة على أنها حدود فصل معلوم .

٦٠ — علماً نعلم فصل تصور ١ يجب أن نسلم بأن الحدود المختلفة المتتمية لهذا الفصل معلومة أيضاً . أى إذا ذكر حد فإنه من الممكن أن نقرر عما إذا كان ذلك الحد يتسمى للفصل . وبهذه الطريقة تعلم مجموعة من الحدود دون أن نعلما واحداً واحداً . وفى الوقت الحاضر سوف لا أتعرض للسؤال الآتى : هل يمكن إعطاء مجموعة من الحدود بطريقة غير طريقة إحصائها أو طريقة فصل التصور . ولكن إمكان إعطاء مجموعة بواسطة فصل التصور هو فى غاية الأهمية ،

لأنها تمكنتنا من معالجة المجموعات اللانهائية كما سيأتى ذكره في الجزء الرابع .
 أما في الوقت الحاضر فسأفحص معنى هذه العبارات : جميع الألفات ، كل
 ألف ، أى ألف ، ألف ، ألف مآ . ولنبدأ بعبارة جميع الألفات فإنها تدل
 على عطف عددى ، يُعَيَّن متى أعطيت ا . والتصور جميع الألفات هو تصور
 محدود مفرد يدل على حدود الألفات مأخوذة جميعها معاً . ويمكن القول بأن
 للحدود عدداً يمكن اعتباره كإحدى خواص فصل تصور لأنه محدد لكل
 فصل تصور . وبالعكس كل ا ، مع أنها أيضاً تدل على جميع الألفات
 إلا أنها تدل عليها بطريقة مختلفة ، أى منفردة لا مجتمعة . وأى ا تدل فقط على
 واحد من الألفات ، وليس مما يهتما بالمرّة أى واحد منها تدل العبارة ، وإنما ذلك
 الذى يقال يكون صحيحاً مهما كانت الألف .

وفضلاً عن ذلك فإن أى ا تدل على ا متغيرة ، بمعنى أننا إذا وقفنا عند ا
 معينة فمن المؤكد أن أى ا لا تدل على هذه . ومع ذلك فكل قضية تصدق
 على أى ا تصدق على هذه الألف . أما « ألف » فهي انفصال متغير بمعنى
 أن القضية التى تصدق على « ألف » قد لا تصدق على كل ألف خاصة
 ولا يمكن ردها إذن إلى انفصال قضايا . فثلاً تقع نقطة بين أى نقطة أخرى
 ولكن لا يمكن القول عن أية نقطة خاصة بالذات أنها تقع بين أى نقطة وأى
 نقطة أخرى ، لأنه سوف توجد أزواج كثيرة من النقط لا تقع نقطتنا بينهما .
 وهذا يصل بنا أخيراً إلى ألف مآ ، أى الانفصال الثابت . فهذا يدل على حد
 واحد فقط من حدود الفصل ا ، ولكن الحد الذى تدل عليه قد يكون أى حد
 من حدود الفصل . فثلاً « لحظة مآ لا تتبع أى لحظة » معناها أنه كانت هناك
 لحظة أولى في الزمن بينها « هناك لحظة تسبق أى لحظة » تعنى العكس تماماً أى
 كل لحظة لها سوايق .

٦١ - وفي حالة الفصل ا ذى العدد المنتهى للحدود مثلاً ا ، ا ، ا ، ا ،
 ان يمكننا توضيح الأفكار السالفة بالطريقة الآتية :

(١) «جميع» الألفات تدل على ا_١ و ا_٢ و... ان .
 (٢) «كل» ا تدل على ا_١ وتدلل على ا_٢ و... وتدلل على ان .
 (٣) «أى» ا تدل على ا_١ أو ا_٢ أو... أو ان حيث «أو» معناها أنه لا يهيم أيهما نأخذ .

(٤) «ألف» تدل على ا_١ أو ا_٢ أو... أو ان حيث «أو» معناها أنه لا ينبغي أن نأخذ واحدة خاصة بالذات، كالحال تماماً في «جميع» الألفات حيث لا ينبغي أن نأخذ واحدا منها بالذات .

(٥) «ألف مآ» : تدل على ا_١ أو تدلل على ا_٢ أو... أو تدل على ان حيث أنه ليس من غير المهم أيها نأخذ بل بالعكس فإن ألفا خاصة بالذات يجب أن تؤخذ .

ولما كانت طبيعة الطرق المختلفة لاجتماع الحدود وخصائص تلك الطرق ذات أهمية حيوية لمبادئ الرياضة فقد نحسن صنعا بتوضيح تلك الخصائص بالأمثلة الهامة الآتية :

أولاً - إذا كانت ا فصلاً، ب فصل فصول، فإننا نحصل على ست حالات بين ا ، ب باجتماعها، باستخدام «أى» ، «أداة التنكير» ، «ما» .
 أما «جميع» و«كل» فهما لا يُدخلان شيئاً جديداً . والحالات الست هي :
 (١) أى ا تنتمي لأى فصل داخل فى ب ، وفى عبارة أخرى الفصل ا بأكمله داخل فى الجزء المشترك ، أو فى حاصل الضرب المنطقى لمختلف الفصول الداخلة فى ب .

(٢) أى ا متممة لواحدة من الباءات . بمعنى أن الفصل ا داخل فى أى فصل يشتمل على جميع الباءات ، أو داخل فى حاصل الجمع المنطقى لجميع الباءات .

(٣) أى ا ينتمى لباء مآ ، أى يوجد فصل داخل فى ب فيه يدخل الفصل ا .
 والفرق بين هذه الحالة وبين الحالة الثانية هو أنه فى هذه الحالة توجد ماء واحدة

يتمى لها كل ا بينا في الحالة الثانية أثبتنا فقط أن كل ا تنتمي لباء ، والألفات المختلفة قد تدخل في باءات مختلفة .

(٤) ألف تنتمي لأي ب ، بمعنى أننا مهما أخذنا ب فإن لها جزءاً مشتركاً مع ا .

(٥) ألف تنتمي لباء ، أى توجد باء لها جزء مشترك مع ا ، وهذا يساوى ا ما تابعة لباء ما .

(٦) ألف ما تدخل في أى ب ، أى توجد ألف تنتمي للجزء المشترك بين جميع الباءات ، أو ا وجميع الباءات لها جزء مشترك .
وهذه هي جميع الحالات التى تنشأ هنا .

ثانياً — ولكي نبين كيف أن العلاقات التى ذكرنا هي من النوع العام فلنقارن الحالة السابقة بما يأتى : إذا كان ا ، ب سلسلتين من الأعداد الحقيقية : فإن حالات ست تنشأ شبيهة بالحالات السابقة .

(١) أى ا أصغر من أى ب ، أو السلسلة ا داخلة في الأعداد التى هي أقل من كل ب .

(٢) أى ا أصغر من باء ، أو مهما كانت ا فإنه توجد ب أكبر منها ، أو السلسلة ا داخلة بين الأعداد التى هي أصغر من حد (متغير) من حدود السلسلة ب . وليس معنى هذا أن حداً ما من حدود السلسلة ب أكبر من جميع الألفات .

(٣) أى ا أصغر من باء ما ، أو يوجد حد ب أكبر من جميع الألفات . ولا ينبغي الخلط بين هذه الحالة والحالة السابقة (٢) .

(٤) ألف أصغر من أى ب : أى مهما كانت قيمة ب فإنه توجد ا أصغر منها .

(٥) ألف أصغر من باء : أى من الممكن إيجاد ألف وباء بحيث تكون ا أقل من ب . وهذا إنما هو مجرد إنكار لكون أى ا أكبر من أى ب .

(٦) ألفٌ ما أقل من أى ب ، أى توجد ا أصغر من جميع الباءات وهذا لا يلزم عن (٤) حيث كانت الألف متغيرة بينما هي ثابتة هنا .
وفي هذه الحالة اضطرتنا الرياضة إلى التمييز بين الانفصال المتغير والانفصال الثابت .

أما في الحالات الأخرى التي لم تغطي عليها الرياضة ، فإن هذا التمييز قد أهمل ، ولم تبحث الرياضة في الطبيعة المنطقية للمعاني الانفصالية المستخدمة في تلك الحالات .

ثالثاً - وهناك مثلاً آخر يوضح الفرق بين أى وكل ، وهو الفرق الذي لم يكن له محل في الحالات السابقة . إذا كان ا ، ب فصل فصول ، فإن هناك عشرين علاقة مختلفة تنشأ عنهما نتيجة لمجموعات الحدود المختلفة المأخوذة من حدودهما . ومن المفيد استخدام الاصطلاحات الفنية الآتية : إذا كان ا فصل فصول ، فإن مجموعه المنطقي يتكون من جميع الحدود الداخلة في أى ا ، أى من جميع الحدود التي هي بحيث يوجد ا تكون تابعة له ، بينما يتكوّن حاصل الضرب المنطقي من جميع الحدود الداخلة في كل ا أى من الجزء المشترك بين جميع الألفات .
فتنشأ لدينا الحالات الآتية :

(١) أى حد من أى ا داخل في كل ب ، أى أن حاصل الجمع المنطقي للألفات داخل في حاصل الضرب المنطقي للباءات .

(٢) أى حد من أى ا داخل في باء ، أى حاصل الجمع المنطقي للألفات داخل في حاصل الجمع المنطقي للباءات .

(٣) أى حد من أى ا داخل في باء مّا ، أى توجد باء يكون حاصل الجمع المنطقي للألفات داخلاً فيها .

(٤) أى حد من ا ما داخل في كل ب ، أى توجد ا داخلة في حاصل ضرب ب .

(٥) أى حد من ا مّا داخل في باء ، أى توجد ا داخل في مجموع ب .
(٨)

(٦) أى حد من ا ما داخل فى باء مآ ، يعنى توجد ب تشتمل على فصل تابع لألف .

(٧) حد من أى ا داخل فى أى ب يعنى ا أى فصل من ا وأى فصل من ب لهما جزء مشترك .

(٨) حد من أى ا داخل فى باء ، يعنى أى فصل من ا له جزء مشترك مع حاصل الجمع المنطقى للباءات .

(٩) حد من أى ا داخل فى باء ما ، يعنى يوجد ب يكون لكل ا معها جزء مشترك .

(١٠) حد من ألف يدخل فى كل ب ، يعنى حاصل الجمع المنطقى للألفات وحاصل الضرب المنطقى للباءات لهما جزء مشترك .

(١١) حد من ألف يدخل فى أى ب ، يعنى إذا علمت أى ب فإنه يمكن إيجاد ا يكون لها مع ب جزء مشترك .

(١٢) حد من ألف يدخل فى باء ، يعنى حاصل الجمع المنطقيين للألفات والباءات لهما جزء مشترك .

(١٣) أى حد من كل ا يدخل فى كل ب ، يعنى حاصل الضرب المنطقى للألفات يدخل فى حاصل الضرب المنطقى للباءات .

(١٤) أى حد من كل ا يدخل فى باء ، يعنى حاصل الضرب المنطقى للألفات يدخل فى حاصل الجمع المنطقى للباءات .

(١٥) أى حد من كل ا يدخل فى باء مآ ، يعنى يوجد حد من حدود ب يكون حاصل الضرب المنطقى للألفات داخلا فيه .

(١٦) حد (أوحد مآ) من كل ا يدخل فى كل ب يعنى حاصل الضرب المنطقيين للألفات والباءات لهما جزء مشترك .

(١٧) حد (أوحد مآ) من كل ا يدخل فى باء يعنى حاصل الضرب المنطقى للألفات وحاصل الجمع المنطقى للباءات لهما جزء مشترك .

(١٨) حدّ ماً من أى ا يدخل فى كل باء ، يعنى أى ا لها جزء مشترك مع حاصل الضرب المنطقى للباءات .

(١٩) حدّ من ألف ماً يدخل فى أى ب ، يعنى يوجد حدّ ماً من حدود ا يكون لكل ب معه جزء مشترك .

(٢٠) حدّ من كل ا يدخل فى أى ب ، يعنى أى ب لها جزء مشترك مع حاصل الضرب المنطقى للألفات .

وتبين هذه الأمثلة أنه بينما يوجد فى الغالب لزوم متبادل بين القضايا المتناظرة المستخدم فيها أداة التوكيد أو كلمة ماً أو المستخدمة فيها كلمتا «أى» و«كل» إلا أن هناك حالات أخرى لا يوجد فيها هذا اللزوم المباشر . وبذلك تكون المعانى الخمسة التى بحثناها فى هذا الباب هى معان مختلفة بعضها عن بعض ، وأن الخلط بينها مما يؤدى إلى أخطاء محققة .

٦٢ — يتضح مما سبق أنه سواءً أكانت هناك طرق مختلفة للدلالة أم لم تكن ، فإن الأشياء المدلول عليها بالعبارات جميع الناس ، كل إنسان إلخ . . . هى حقاً متميزة عن بعضها . ونكون حينئذ محقين إذا قلنا إن الفرق كله واقع فى الأشياء ، وأن الدلالة هى ذاتها فى جميع الحالات . ومع ذلك فهناك مشكلات كثيرة صعبة متصلة بهذا الموضوع ، وبوجه خاص لطبيعة الأشياء المدلول عليها . فـ «جميع» الناس وهى التى سنطابق بينها وبين فصل الناس ، تبدو لا إبهام فيها ، مع أنها تقع فى صيغة الجمع من الناحية اللغوية . ولكن المسألة ليست فى مثل هذه البساطة بالنسبة للحالات الأخرى : فقد يتسرب إلينا الشك فى أن الشيء المهم قد دلّ عليه بدون إبهام ، أو أن الشيء المحدد قد دلّ عليه بإبهام . نخذ القضية « قابلت إنساناً » فنالحق ، وما يلزم عن القضية ، أن الذى قابلت هو إنسان معين لا إبهام فيه . ويمكن التعبير عن هذه القضية بالاصطلاح الفنى المستخدم هنا بقولنا « قابلت إنساناً ماً » ولكن الإنسان الواقعى الذى قابلته لا يكون جزءاً من القضية المذكورة ، ولا يدل عليه بوجه خاص بالعبرة « إنسان ماً » ، وعلى

ذلك فالحادثة المادية التي وقعت ليس محكوماً بها في القضية . أما المحكوم به في القضية فهو مجرد أن واحدة ما من فصل الأحداث المادية قد وقعت بالذات . فالجنس البشري كله داخل في هذا الحكم فلو أن أى إنسان قد عاش في الماضي ، أوسولك ، لم يوجد أوسوف يوجد لتغير معنى القضية . ويمكن وضع هذا في لغة أدنى إلى المفهوم بقولنا : إذا عوضت الإنسان بأى من فصل التصورات التي تنطبق على الفرد الذى كان لى شرف لقائه ، فإن القضية تتغير ، ولو أن الفرد المذكور يكون مدلولاً عليه كسابقه بالضبط . والذي يشته هذا هو أنه لا ينبغي اعتبار «إنسان ما» دالاً فعلاً على زيداً أو دالاً فعلاً على خالد، وهكذا. فال مخلوقات البشرية على عمر العصور ذات صلة بكل قضية تدخل فيها عبارة إنسان ما ، والذي يدل عليه ليس كل إنسان على انفراد ، ولكن نوعاً مما اجتمع من جميع الناس. وهذا أوضح في حالة «كل» و«أى» وأداة التنكير . وإذن فهناك شيء مامعين ومختلف في كل من الحالات الخمس ويجب أن يكون شيئاً بوجه من الوجوه ولكنه يتميز بأنه مجموعة من الخلود مجتمعة بشكل خاص ، وهذا الشيء هو ما يدل عليه بجميع الناس ، كل إنسان ، أى إنسان ، إنسان ، إنسان ما . وعناية القضايا بهذا الشيء الشديد التناقض حيث يستعمل التصور المقابل للدلالة عليه .

٦٣ - بقى علينا أن نبحث في فكرة أداة التعريف «ال» . وقد أبرز «بيانو» الوجهة الرمزية لأداة التعريف وحصل على نتائج ذات فائدة كبرى في حسابه التحليلي . ولكننا سنبحث فيها هنا من الناحية الفلسفية . فاستخدام التطابق ونظرية التعريف يتوقفان على فكرة أداة التعريف ، وهي بذلك لها أكبر الأهمية من الناحية الفلسفية .

وأداة التعريف «أل» في حالة المفرد لا تستخدم إلا بالنسبة لفصل تصور ليس له إلا فرد واحد . فنحن نتكلم عن الملك ، الرئيس للوزارة ، وهكذا (على أن يكون مفهوماً أن ذلك يدل على معنى في الوقت الحاضر) وفي مثل هذه الأحوال توجد طريقة للدلالة على حد معين مفرد بواسطة تصور ، وهذه الطريقة لا تعطينا

إياها أى واحدة من ألفاظنا الخمسة . وبفضل هذه الفكرة تستطيع الرياضة أن تعرف الحدود التى ليست بتصورات . وهذا مثل على الفرق بين التعريف الرياضى والتعريف الفلسفى . وكل حد هو الفرد الوحيد لفصل تصور ما ، وعلى ذلك ، فن الناحية النظرية ، يكون كل حد قابلاً للتعريف ما لم نكن قد استخدمنا نظاماً يكون فيه هذا الحد واحداً من المسلمات (مما لا يمكن تعريفه) . وإنه لمن المتناقضات العجيبة ، التى تحير عقول أصحاب الرمزية ، أن التعاريف من الناحية النظرية إن هى إلا تفريرات لاختصارات رمزية غريبة عن العقل ، وموضوعة لمجرد الفائدة العملية . ومع ذلك فهذه التعاريف ، عند بناء الموضوع ، تحتاج إلى درجة كبيرة من الفكر وينطوى تحتها أحياناً بعض النتائج الهامة للتحليل . ويبدو أن هذه الحقيقة تجد لها تفسيراً فى نظرية الدلالة . فالشئ قد يكون حاضراً فى العقل دون أن نعرف أى تصور يكون هذا الشئ الحالة الخاصة للفردية منه . واكتشاف مثل هذا التصور ليس بمجرد تحسين فى الاصطلاحات . والسبب فى هذا أنه بمجرد أن نجد التعريف يصبح من غير الضرورى للتذكير أن نذكر الشئ المعروف ، ما دامت التصورات وحدها هى التى تدخل فى استنتاجاتنا . وفى لحظة الاكتشاف يظهر التعريف صحيحاً ، لأن الشئ الذى نريد تعريفه كان ماثلاً فى تفكيرنا . ولكن عند الاستنباط لا يكون صحيحاً ، وإنما يكون مجرد رمز لأن ما يحتاجه الاستنباط ليس الكلام عن هذا الشئ ولكن الكلام عن الشئ الذى يدل عليه التعريف .

وفى أغلب التعاريف التى ترد فعلاً فى الرياضة : المعروف هو فصل من الكائنات ، وبذلك لا تظهر صراحة فكرة أداة التعريف «ا» . ولكن حتى فى هذه الحالة أيضاً نجد أننا فى الحقيقة نعرف الفصل الذى يحقق شروطاً معينة . وسرى فى الباب التالى أن الفصل هودائماً حد أو اتصال حدود ، ولا يمكن أن يكون تصوراً بالمرّة . وعلى ذلك ففكرة أداة التعريف «ا» لازمة للتعاريف . ونلاحظ بصفة عامة أن كفاية التصورات للتعبير عن الأشياء تتوقف كلية

على الطريقة التي لا إبهام فيها التي يدل بها على حد واحد والتي تم بواسطة أداة التعريف .

٦٤ - إن صلة الدلالة بطبيعة التطابق هامة وتساعد في نظري على حل بعض المسائل الصعبة . وليس من اليسير الإجابة على السؤال : هل التطابق علاقة أم لا ؟ وهل هناك تصور مثل هذا بالمرّة ؟ فقد يقال إن التطابق لا يمكن أن يكون علاقة ، لأنه عندما يكون محكوماً به حقاً يكون عندنا حد واحد ، على حين يلزم لكل علاقة حدان . وقد يقول المعارض : في الواقع لا يمكن أن يكون التطابق شيئاً بالمرّة ، فواضح أن الحدين لا يمكن أن يكونا متطابقين ، ولا يمكن لحد أن يكون متطابقاً ، وإلا فمع أى شيء هو متطابق ؟

ومع ذلك فالتطابق يجب أن يكون شيئاً ما . وقد نحاول أن ننقل التطابق من الحدود إلى العلاقات ، ونقول : إن حدين يكونان متطابقين من بعض الوجوه عندما تكون لهما علاقة معلومة بحد معلوم . ولكن علينا في هذه الحالة أن نسلم إما أن هناك تطابقاً دقيقاً بين حالتي العلاقة المعلومة ، أو أن الحالتين بينهما تطابق بمعنى أن لهما علاقة معلومة لحد معلوم . ولكن وجهة النظر الأخيرة تؤدي بنا إلى عملية لا تنهى من النوع غير المقبول . وهكذا يجب أن نسلم بالتطابق . أما الصعوبة الخاصة بوجود وجود حدين للعلاقة فيمكن ملافاتها بالإنكار التام لوجوب حدين حقاً ، وينبغي أن يكون هناك دائماً متعلق به ومتعلق ، ولكن ليس حتماً أن يكونا مختلفين . وهم ليسا كذلك في الحالات التي تثبت فيها المطابقة^(١) . وينشأ السؤال الآتي : لم كان من المفيد أن نثبت التطابق؟ وهذا السؤال جوابه في نظرية الدلالة . فإذا قلنا « إدوارد السابع هو الملك » فقد أثبتنا تطابقاً . والسبب في أن هذا الحكم يستأهل الإثبات هو أنه في إحدى الحالتين يدخل فعلاً الحد ، بينما في الحالة الأخرى يحل تصور محله . (وسأتجاهل هنا أن الإدواردات تكون فصلاً ، وأن الإدواردات السابقة تكون فصلاً ذا حد

(١) انظر الباب التاسع بند ٩٥ ، في الكلام على علاقة الحدود بذاتها .

واحد . أما إدوارد السابع فهو عمليا ، ولأنه ليس شكليا ، اسم علم) . ويحدث غالبا أن يحصل تصوران دالان ولا نجد ذكرا للحد ذاته كما في القضية « البابا الحالي هو آخر الأحياء من جيله » . وعندما يعلم الحد ، فإن الحكم بتطابقه مع نفسه ولو أنه صحيح عديم الفائدة ، ولا نجده خارج كتب المنطق . ولكن عندما تدخل التصورات الدالة يصبح التطابق في الحال ذا مغزى . وفي هذه الحالة تدخل علاقة بين التصور الدال والحد ، أو علاقة بين كل من التصورين الدالين ، وإن لم تكن هذه العلاقة مثبتة . ولكن « هو » (is في الإنجليزية) التي ترد في مثل هذه القضايا لا تقر بذاتها هذه العلاقة الزائدة ، بل تقرر التطابق البحث^(١) .

٦٥ - والخلاصة : فصل التصور المسبوق بواحد من الألفاظ الستة : « جميع » ، « كل » ، « أى » ، « أداة التفكير » ، « ما » ، أداة التعريف « ال » ، إذا دخل في قضية فإن القضية بصفة عامة لا تكون حول التصور الذى يتكون من اللفظتين معا ، ولكنها تكون حول شيء مختلف تماما عن هذا ، وهذا الشيء ليس في العادة تصورا بالمرّة ، ولكنه حد أو مركب من حدود . ويتضح هذا من أن القضايا التى تدخل فيها هذه التصورات هي قضايا كاذبة على العموم بالنسبة للتصورات ذاتها . وفي نفس الوقت في الإمكان الكلام عن قضايا التصورات ذاتها بل وصياغة مثل هذه القضايا ، ولكنها لا تكون القضايا الطبيعية التى تنشأ باستخدام هذه التصورات فالقضية « أى عدد إما فردى أو زوجى » هي قضية

(١) لفظة « is » غامضة جداً ، ولا بد من العناية الشديدة عند النظر في أمرها حتى لا تلتبس معانيها ، فهناك (١) المعنى الذى تثبت فيه الوجود ، كما في قولنا « is A » .
(٢) معنى التطابق (٣) معنى الحمل في قولنا « A is human » (٤) المعنى الموجود في قولنا « A is a-man » (انظر هامش صفحة ١٠٤) وهو المعنى الشبيه جداً بالتطابق . وإلى جانب هذه المعاني هناك . استعمالات أقل شيوعاً مثل « To be good is to be happy » حيث يكون المقصود علاقة من الأحكام ، وهذه العلاقة في الواقع تؤدي حيث توصل إلى الزوم الصورى . ولا ريب أن هناك معان أخرى لم تحصل عنى . انظر في معاني « is »

طبيعية جداً ، على حين أن القضية « أى عدد هو اتصال متغير » فإنما هى قضية لا يجدها المرء إلا فى البحوث المنطقية . وفى هذه الحالات نقول إن التصور المذكور يدل . وقد اتفقنا على أن الدلالة علاقة محددة تماماً ، وهى ذاتها فى جميع الحالات الست ، وأنها هى طبيعة الشيء المدلول عليه والتصور الدال ، وهى التى تميز الحالات المختلفة بعضها عن بعض . ولقد بحثنا مع بعض التفصيل فى طبيعة الأشياء المدلول عليها وفى الفروق بينها فى الحالات الخمس التى تكون فيها هذه الأشياء عبارة عن تجمعات من الحدود . والدراسة الكاملة تقتضى البحث كذلك فى التصورات الدالة . ولم نبحث فيما سبق الفرق بين المعنى الفعلى لهذه التصورات وبين طبيعة الأشياء التى تدل عليها . ولكنى لا أعرف أنه هناك ما يمكن أن يقال عن هذا أكثر من ذلك . وأخيراً بحثنا فى أداة التعريف أ ل ، وبيننا أن هذه الفكرة أساسية لما نسميه الرياضيات بالتعريف ، كما أنها أساسية كذلك لإمكان تحديد الحد تحديداً يقوم فقط على التصورات . وقد وجدنا أن الاستخدام الفعلى للتطابق ، وإن لم يكن معناه ، يتوقف على هذه الطريقة فى الدلالة على الحد الواحد . ومن هنا نسير إلى البحث فى الفصول ، وبذلك نتناول الموضوعات المتصلة بالصفات .

الباب السادس

الفصول

٦٦ - من أصعب المشكلات فى الفلسفة الرياضية وأعظمها أهمية أن تتمثل فى الذهن تمثلاً واضحاً المقصود بـ « الفصل » ، وأن نميز هذا المعنى عن سائر المعانى التى ترتبط به . وذلك أنه فضلاً عن أن « الفصل » تصورٌ أساسى جداً ، فموضوعه يحتاج فى علاجه إلى غاية العناية والدقة ، بالنظر إلى مسألة التناقض التى سنناقشها فى الباب العاشر من هذا الكتاب . ولا بد لى من أجل ذلك أن أطلب من القارئ ألا ينظر إلى مجموع التمييزات الدقيقة بعض الشيء والواردة فيما بعد على أنها حذقة فارغة .

وقد جرت العادة فى كتب المنطق على التمييز بين وجهتين من النظر هما الماصدق والمفهوم . أما الفلاسفة فقد تعودوا اعتبار المفهوم أكثر أساسياً ، على حين جرى العرف بأن الرياضيات تبحث بوجه خاص فى الماصدق . ويقرر « كوتيراه » M. Couturat بوجه عام فى كتابه البديع عن « ليبستر » أن المنطق الرمزى لا يمكن أن يبنى إلا على أساس الماصدق^(١) . وقد كان يمكن أن نجد لرأيه ما يسوغه لو لم تكن ثمة فى الواقع إلهاتان الوجهتان من النظر ؛ غير أن الحق هو أن هناك مواضع متوسطة بين المفهوم والبحث والماصدق الخالص ، وفى هذه المناطق المتوسطة يقوم المنطق الرمزى . هذا إلى أن الفصول التى هى موضوع بحثنا لابد أن تتركب من حدود ، لا أن تكون محمولات أو تصورات ، إذ يجب أن يكون الفصل معيناً حين تعطى حدوده ، ولكننا على وجه العموم سنجد كثيراً من المحمولات تصلح أن تتعلق بالحدود المعطاة دون غيرها . ولانستطيع

بطبيعة الحال محاولة تعريف الفصل بالمفهوم على أنه فصل من المحمولات التي تتعلق بالحدود المعطاة دون غيرها ، حتى لا يقع تعريفنا في دور . ولذلك لا يمكننا إلى حد ما مفاداة وجهة نظر الماصدق . ومن جهة أخرى إذا أخذنا بالماصدق الخالص فقد عرفنا الفصل بتعداد حدوده ، وفي هذه الحالة لن تسمح لنا هذه الطريقة بالبحث في الفصول غير المتناهية كما يفعل المنطق الرمزي . لذلك يجب بوجه عام أن ننظر إلى الفصول التي تبحث فيها كأنها أشياء تدل عليها ، ومن هذا الوجه كان النظر إلى المفهوم ضروريا . وإلى هذا الاعتبار ترجع الأهمية العظمى لنظرية الدلالة . وسأخذ أنفسنا في هذا الباب من الكتاب بأن نبين بالدقة القدر الذي يتدخل فيه الماصدق والمفهوم على الترتيب في التعريف وفي استخدام الفصول . كما أنه لا بد لنا خلال مناقشة الموضوع التوجه إلى القارئ أن يجعل في باله أن كل ما نقوله ينطبق على الفصول المتناهية وغير المتناهية على حد سواء .

٦٧ - إذا كان شيء ما مدلولاً عليه في غير إيهام بتصور ، فسأتكلم عن التصور كتصور (أو في بعض الأحيان متجاوزاً على أنه « أ » تصور للشيء الذي نتكلم عنه . ومن أجل ذلك كان لا بد من التمييز بين تصور الفصل وبين فصل التصور . وقد جرى العرف على تسمية « الإنسان » فصلاً تصورياً ، غير أن الإنسان لا يدل في استعماله العادي على أي شيء . ومن جهة أخرى فإن « الناس » و « جميع الناس » (وهو ما سأعتبره مرادفاً) يدل بالفعل ، وسأفترض أن ما يدلان عليه هو الفصل المؤلف من جميع الناس . على هذا يكون « الإنسان » هو فصل التصور ، و « الناس » (التصور) هو تصور الفصل ، والناس (الشيء الذي يدل عليه التصور « الناس ») هم الفصل . ولا ريب أنه مما يدعو إلى الاضطراب في أول الأمر استعمال فصل التصور في معاني مختلفة ، وحيث كنا في حاجة إلى كثير من التمييزات فيبدو أننا لن نتمكن من تجنب تحميل اللغة أكثر مما تطيق عادة . وبعبارات الباب السابق يمكن القول بأن

الفصل هو الصلة العددية بين الحدود ، وهذه هي الدعوى التي نريد إثباتها .
 ٦٨ — لقد نظرنا في الباب الثاني إلى الفصول على أنها مشتقة من أحكام ،
 أى على أن جميع الأشياء تحقق تقريراً ما مبهم الصورة تماماً . وسأناقش هذه
 المسألة مناقشة نقدية في الباب الآتي ، أما في هذا الباب فستقتنع بالبحث في
 الفصول من جهة أنها مشتقة من محمولات ، دون أن تقطع برأى أكل حكم
 مكافئ لحمل أم لا . ونستطيع بعد ذلك أن نتخيل ضرباً من توالد الفصول
 يجري في المراحل المتوالية التي تشير إليها هذه القضايا النموذجية « سقراط إنساني »
 و « سقراط له إنسانية » و « سقراط إنسان » و « سقراط واحد من الناس » .
 ويمكن أن نقول إن القضية الأخيرة دون سائر القضايا هي وحدها التي تشتمل
 صراحة على الفصل باعتبار أنه مكوّن . ولكن كل قضية مركبة من موضوع
 ومحمول ينشأ عنها القضايا الثلاث المكافئة ، وبذلك ينشأ من كل محمول
 (بشرط أنه يمكن في بعض الأحيان حمله) فصلٌ . وهذا هو توالد الفصول
 من وجهة نظر المفهوم .

ومن ناحية أخرى فإن الرياضيين حين يبحثون فيما يسمونه المجموع ، أو
 المجموعة ، أو أى لفظ آخر من هذا القبيل ، فن المألوف وبخاصة حين يكون
 عدد الحدود الداخلة متناهماً أن ينظروا إلى الموضوع الذي يبحثونه (الذي
 هو في الواقع فصل) على أنه معرفٌ بتعداد حدوده ، وربما يكون متكوناً من
 حد واحد هو في هذه الحالة الفصل . فالأمر هنا ليس أمر محمولات ودلالات ،
 بل أمر حدود ترتبط بواو العطف على المعنى الذي تدل عليه لفظة الواو بالعطف
 العددي . وعلى ذلك يكون زيد وعمر فصلًا ، ويكون زيد وحده فصلًا . وهذا
 هو الأصل في توالد الفصول من جهة الماصدق .

٦٩ — أفضل دراسة صورية للفصول موجودة بين أيدينا^(١) هي تلك التي قام

(١) مع إنغال فريج Frege الذي سأناقشه في الملحق .

بها « بيانو » ، غير أنه أغفل في دراسته عدداً من التمييزات في غاية الأهمية الفلسفية . ويُوجد « بيانو » بين الفصل وبين فصل التصور ، ولا أعتقد أنه فعل ذلك عن وعي تام : فعنده أن علاقة الفرد بفصله ، هي التي يعبر عنها « هو » is a ^(١) ، وهو يرى أن القضية « ٢ هو عدد » قضية الحد فيها داخل تحت الفصل « عدد » . ومع ذلك فإنه يوجد بين تساوى الفصول أى اشتراكاً على نفس الحدود ، وبين التطابق ، وهذا إجراء غير مشروع عندما ننظر إلى الفصل على أنه فصل التصور . فلكي ندرك أن الإنسان والماشي على قدمين عارى الريش ليسا شيئاً واحداً ، فليس من الضروري أن نأخذ دجاجة ونترع عن هذا الطائر المسكين ريشه . أو فلنأخذ مثالا أقل تعقيداً ، فن الواضح أن العدد الأولى الزوجي ليس مطابقاً للعدد الصحيح بعد الواحد . وهكذا إذا وجدنا بين الفصل وبين فصل التصور ، فينبغي أن نسلم بأن فصلين قد يكونان متساويين دون أن يكونا متطابقين . ومع ذلك فن الواضح أنه حين يوجد فصلان متساويان فثمة شيء من التطابق بينهما ، لأننا نقول إنهما « نفس » الحدود . وعلى ذلك هناك شيء ما لا شك في اشتراكه عند تساوى فصلين تصوريين ، ويبدو أن هذا الشيء هو الأجلر أن يسمى الفصل . دع مثال الدجاجة المتوفرة الريش جانباً ، نجد أن أى شخص يقول عن فصل الماشي على قدمين عارى الريش أنه « بعينه » فصل الناس ، وأن فصل الأعداد الأولية الزوجية هو بعينه فصل الأعداد الصحيحة بعد الواحد . وعلى ذلك فلا ينبغي أن نطابق بين الفصل وبين فصل التصور ، أو نعتبر أن « سقراط إنسان » قضية مُعَبَّرَةٌ عن علاقة فرد بالفصل الذى هو جزئى له . ويترتب على ذلك نتيجتان (ستثبتهما بعد قليل) يمنعان من الاقتناع الفلسفى ببعض النقط في مذهب « بيانو » الصورى . وأولى النتيجةين

(١) في اللغة الأجنبية الرابطة Copula هي فعل الكينونة to be في الانجليزية و être في الفرنسية ، وأيس في العربية رابطة ، وقد وضع المناطقة لفظه « هو » بدلها ، وبذلك تكون القضية المصرح فيها هو ثلاثية . [الترجم] .

أنه لا يوجد ما يسمى بالفصل الصفري ، ولو أنه توجد فصول تصورية صفر . والنتيجة الثانية أن الفصل إذا كان ذا حد واحد فينبغي أن يطابق بينه ، على عكس ما جرى عليه عرف « بيانو » ، وبين ذلك الحد الواحد . ومع ذلك فلن أقترح تغيير استعمال « بيانو » أو رموزه بناءً على أى نقطة مما أثرته ، على العكس إنى أراها أدلة ينبغى على المنطق الرمزي ، فيما يخص بالرموز ، أن تكون عنايته بالفصول التصويرية أولى من عنايته بالفصول .

٧٠ - لقد رأينا أن الفصل ليس محمولا ، ولا فصلا تصوريا ، لأن محمولات مختلفة وفصولا تصورية مختلفة قد تتفق مع فصل بعينه . وكذلك الفصل ، على الأقل في أحد معانيه ، متميز عن الكل المؤلف من حدوده ، لأن كل الحدود إنما هو شيء في جوهره واحد ، على حين أن الفصل عندما يكون له حدود كثيرة هو ، كما سنرى فيما بعد ، هذا الضرب عينه الذى نخبر فيه عن الكثير . وغالبا ما نجد اللغة تجرى على التمييز بين الفصل ككثير ، وبين الفصل ككل ، مثل : المكان والنقط ، الزمان واللحظات ، الجيش والبحند ، البحرية والبحارة ، مجلس الوزراء والوزراء ، وهذه كلها أمثلة توضح ذلك التمييز . إن المقصود من الكل ، على معنى المجموعة البحتة التى نتكلم عنها فى هذا الصدد ، ليس دائما كما سنجد فيما بعد قابلا للتطبيق حيث يكون المفهوم من الفصل ككثير متطبعا (انظر الباب العاشر) . وفى هذه الحالات لا يجب أن يُستعمل الفصل على أنه هو نفسه موضوع منطقي واحد^(١) ، ولو أن الحدود يمكن القول إنها تتلرج تحت الفصل . ولكن هذه الحالة لا تنشأ أبداً عندما يمكن أن يتولد الفصل من المحمول . وهكذا نستطيع فى الوقت الحاضر أن نبعد هذه المشكلة المعقدة من أذهاننا . وللحدود المكونة للفصل ككثير ولو أن لها ضرباً من الوحدة ، إلا أنها أقل مما يحتاج إليه الفصل ككل . الواقع أن فى هذه

(١) ليست الكثرة من الحدود موضوعاً منطقياً حين يحكم عليها بعدد ، ومثل هذه القضايا ليس لها موضوع واحد بل موضوعات كثيرة . انظر آخر بند ٧٤ .

الحدود من الوحدة ما يكفى أن يجعلها كثرة ، ولكن ليس في هذه الوحدة ما يكفى أن يمنع الكثرة من البقاء كثرة . وثمة سبب آخر للتمييز بين الكل وبين الفصول ككثرة ، هو أن الفصل كواحد قد يكون واحداً من حدود الفصل ككثرة ، كما هي الحال في « الفصول واحدة بين فصول » (وهذا يكافئ من ناحية الماصدق « الفصل هو فصل تصور ») أما الكل المركب فلا يمكن أبداً أن يكون أحد مكوناته .

٧١ - يمكن أن يعرف الفصل إما بالماصدق وإما بالمفهوم ، نغنى أننا قد نعرف نوع الشيء الذى هو الفصل ، أو نوع التصور الذى يدل على الفصل : وهذا هو المعنى الدقيق للتقابل بين الماصدق والمفهوم ، في هذا المجال . ولكن ولو أن المعنى يمكن تعريفه بهذه الطريقة الثنائية ، إلا أن الفصول الخاصة ما عدا ما كان منها متناهياً لا يمكن تعريفها إلا بالمفهوم ، كالحال في الأشياء التى تدل عليها هذه المعاني أو تلك . وعندى أن هذا التمييز هو تمييز نفساني بحث : أما من الناحية المنطقية فإن التعريف بالماصدق يبدو منطقياً على الفصول غير المنتهية على حد سواء ، غير أنه من الناحية العملية لا يمكننا محاولة ذلك ، لأن الأجل يحول بيننا وبين بلوغ غرضنا من هذه المحاولة المرجوة . يبدو إذن أن الماصدق والمفهوم من الناحية المنطقية يقفان على قدم المساواة . وسأبدأ بالكلام عن وجهة النظر الماصدية .

عندما نعتبر الفصل معرفة بتعداد حدوده ، فالأقرب إلى الطبيعي أن يسمى مجموعة . وسأصطنع مؤقتاً هذا الاسم لأنه لن يقضى في هذا الأمر ، نغنى أن تكون الأشياء التى يدل عليها فصولاً حقاً أم لا . وأعني بالمجموعة ما يفهم من « ا و » أو « ا و ح » أو أى تعداد آخر لحدود معينة . وتُعرف المجموعة بذكر الحدود الموجودة في الواقع ، وتربط « الواو » بين حدودها . وقد يبدو أن « الواو » تمثل الطريق الأساسى لربط الحدود ، وهذا الطريق بالذات جوهري إذا شئنا أن نحصل على نتيجة من تقرير عدد خلاف الواحد . ولا تفترض المجموعات الأعداد ما دامت

تنشأ من مجرد ضم الحدود معاً بواو العطف : ولكنها إنما تفترض الأعداد في تلك الأحوال الخاصة حيث تكون حدود المجموعة ذاتها أعداداً مفروضة . وثمة صعوبة نحوية يجب التنبيه عليها وقبولها ، ما دمنا لا نجد طريقة أخرى لمفاداتها . فالمجموعة نحوياً في صيغة المفرد ، على حين أن ا ب ، ا و ب و ح إلخ هي في جوهرها جمع . وتنشأ هذه الصعوبة النحوية من الحقيقة المنطقية (التي سنناقشها بعد قليل) وهي أن كل ما هو كثير بوجه عام يكون كلا واحداً ، فلا سبيل لنا إلى حل هذه الصعوبة باختيار اصطلاح أفضل .

و « بولزانو » Bolzano هو الذى أبرز أهمية فكرة «الواو»^(١) . يقول « بولزانو » إنه لكي نفهم اللامتناهي " يجب أن نرجع إلى تصور من أبسط التصورات في أذهاننا حتى نصل إلى اتفاق فيما يختص باللفظة التي نستعملها في الدلالة على ذلك التصور ، وهو الذى يقابل واو العطف ، تلك الرابطة التي إذا وجب أن تبرز بالوضوح الذى نريده ، ففي كثير من الأحوال لتحقيق الأغراض الرياضية والفلسفية على السواء ، اعتقد من الأفضل التعبير بهذه الألفاظ : نظام (Inbegriff) من أشياء معينة أو كل يتكوّن من أجزاء معينة . ولكننا يجب أن نضيف إلى ذلك أن أى شيء فرضناه ا يمكن أن يرتبط في نظام مع أى ب ، ح ، د . . . أخرى ، أو (إذا تكلمنا بدقة أكثر) أنها تكون نظاماً يقوم بذاته^(٢) ؛ ويمكن أن تنشأ عنه حقيقة على قدر كثير أو قليل من الأهمية بشرط أن كل مجموعة من ا ، ب ، ح ، د . . . تمثل في الواقع شيئاً مختلفاً ، أو ألا تكون أى هذه القضايا ا هي نفس ب ، و ب هي نفس ح ، و ح هي نفس د ، إلخ ، صادقة . لأنه إذا كانت مثلاً ا هي نفس ب فن غير المعقول أن نتكلم عن نظام من الأشياء هو ا ، ب . " .

والفقرة السابقة ولو أنها جيدة إلا أنها تُغفل عدة تمييزات نرى أنها ضرورية .

(١) Paradoxien die Unendlichen, Leipzig, 1854 (2nd ed., Berlin, 1889, 83)

(٢) أى أن الجمع بين ا وبين ب ، ح ، د . . . يكون نظاماً .

فليس فيها أولاً وقبل كل شيء تمييز بين الكثير وبين الكل الذى يتركب منه .
وثانياً لم يلحظ فيها فيما يبدو أن طريقة التعداد لا تنطبق عملياً على الأنظمة غير
المتناهية . وثالثاً ، وهذه نقطة مرتبطة بالنقطة الثانية ، ليس فى عبارة الفقرة
السابقة أى ذكر للتعريف بالمفهوم ، ولا معنى للفصل . وما يعيننا هو التمييز إن
وجد بين الفصل وبين المجموعة من جهة ، وبين الكل المتكون من المجموعة
من جهة أخرى . ويحسن بنا أن نمضى أولاً فى الفحص عن معنى «الواو» .

كل شيء يمكن أن يقرره عدد متناهٍ فيما عدا الصفر أو الواحد يمكن أن
يقال عنه بوجه عام إنه كثير ، ويمكن القول بأن الكثير هو ما كانت صورته
على اللوام هذه الصورة : « ا و ب و ح و . . . » . فحين نجد هنا أن كلا
من ا ، ب ، ح . . . واحد ، وهى جميعاً مختلفة . ويبدو أن القول بأن ا واحد
هو نفس القول بأن ا ليس كهذه الصورة « ا و ا و ا و ا و ا و . . . » . ويبدو
أن قولنا ا ، ب ، ح . . . هى كلها مختلفة إنما تفيد شرطاً بالنسبة للرموز :
يجب أن يكون معلوماً أن « ا و ا » لا معنى لها ، فالتعدد مفهوم من استعمال
الواو ، ولا حاجة بنا إلى النص على ذلك بوجه خاص .

وقد يمكن اعتبار الحد ا الذى هو واحد كأنه حالة خاصة لمجموعة ، نعنى
لمجموعة من حد واحد . وبذلك نفترض مقدماً كل مجموعة مركبة من كثرة عدة
مجموعات كل منها واحد : أى أن ا ، ب تفترض مقدماً ا وتفترض مقدماً ب .
وبالعكس نفترض مقدماً بعض المجموعات المركبة من حد واحد كثرة ، وهى
المجموعات المركبة . مثال ذلك « ا يختلف عن ب » واحد ، ولكنها تفترض مقدماً
ا والاختلاف و ب . إلا أنه لا يوجد تماثل فى هذا الصدد لأن المفروضات
النهائية لأى شيء هى دائماً حدود بسيطة .

ويمكن أن يرتبط كل زوج من الحدود بغير استثناء بالطريقة التى نشير
إليها بقولنا ا و ب ؛ وإذا لم يكن لا ا ولا ب كثرةً ، كان ا و ب اثنين .
قد يكون ا و ب أى شيئين متصورين ، أى موضوعين ممكنين للفكر ، قد

يكونان قطعتين أو علدين أو قضيتين صادقتين أو كاذبتين ، حادثتين أو شخصين ، وعلى الجملة أى شيء يصلح أن يعد . ولا نزاع فى أن المعلقة والعدد ٣ ، أو النول والمكان ذو الأربعة الأبعاد ، اثنان . وعلى ذلك فلا ينبغي أن يُفرض أى قيد على ا و ب ، فيما عدا أن أى واحد منهما يكون كثيراً . ومن الضروري ملاحظة أن ا و ب لا يجب أن تكون موجودة ، ولكنهما كأى شيء يمكن ذكره يجب أن يكون لهما كون . والتمييز بين الوجود المهم (١) ، توضحه عملية العد أحسن توضيح . ذلك أن ما يقبل العد فلا بد أن يكون شيئاً ما ، ويجب بكل تأكيد أن يكون ، ولو أنه لا يحتاج بأى حال إلى أن يتصف بصفة الوجود . صفة القول لا تطلب من حدود المجموعة سوى أن يكون كل حد شيئاً ما .

ونستطيع الآن أن نسأل هذا السؤال : ما المقصود با و ب ؟ أيغنى ذلك شيئاً أكثر من تجاوز ا و ب ؟ أى هل تشمل أى عنصر أعلى من ا وأعلى من ب ؟ هل «الواو» تصور منفصل يقع إلى جانب ا و ب ؟ ولكل إجابة عن هذه الأسئلة اعتراضات . فأول كل شيء لا يمكن أن تكون الواو فيما نفرض تصوراً جديداً إذ لو كانت كذلك لوجب أن تكون ضرباً من العلاقة بين ا و ب ، وفى هذه الحالة تكون ا و ب قضية ، أو على الأقل تصور قضية ، فتكون بذلك واحدة لا اثنتين . وفضلاً عن ذلك فلو كانا تصوران ، فهما اثنان ولا حاجة لتصور متوسط ليجعلهما اثنتين ، وبذلك تكون «الواو» لامتغى لها . ومع ذلك فن الصعب التمسك بهذه النظرية . ولنبدأ فنقول إنه يبدو من المجازفة الذهاب إلى أن أى لفظة تخلو من المعنى . فتحين حين نستعمل لفظة «الواو» لا يبدو أننا نتمم مجرد أنفاس عاطلة ، بل ثمة فكرة ما يبدو أنها تقابل اللفظ . ومن جهة أخرى يظهر أن هناك ضرباً من الربط يتضمنه الواقع من أن ا و ب اثنان ، وليس هذا صحيحاً عن أى واحد منهما على حدة . عندما نقول « ا و ب أصفران » يمكن

(١) هذا التمييز بين الـ Being والوجود existence من وضع المؤلف ، وقد ذكره لا لاند فى قاموسه الفلسفى . [المترجم] .

أن نضع بدلا من هذه القضية أن « ا أصفر » و « ب أصفر » ، ولكننا لا نستطيع أن نفعل مثل ذلك بالقضية « ا و ب اثنان » ؛ على العكس « ا واحد » و « ب واحد » . يحسن إذن فيما يبدو أن نعتبر الواو معبرة عن ضرب محدد فريد من الربط ، ليست علاقة ، وليست ربطا بين ا و ب في كل ، وإلا كان واحداً . وهنا الضرب الفريد من الربط هو الذى سنسميه فيما بعد جمع الأفراد . ومن المهم ملاحظة أن هذا الربط ينطبق على الحدود ، ولا ينطبق على الأعداد إلا لكونها حدوداً . وعلى ذلك نقول مؤقتاً إن ١ و ٢ اثنان ، أما ١ و ١ فلا معنى لها . أما فيما يختص بالمقصود من الربط الذى يدل عليه الواو ، فهذا المقصود لا يتميز عما سميناه من قبل بالمطف العددي ، ونعني بذلك أن ا و ب هو ما يدل عليه تصور الفصل الذى يكون ا و ب أفراده الوحيدين . وإذا كان ي فصل التصور الذى تكون قضاياه « ا هـ » و « ب هـ » « هـ » صادقتين ، وتكون سائر قضاياه الأخرى من نفس الصورة كاذبة ، إذن « جميع الياءات » هـ تصور الفصل الذى تكون حدوده هـ ا و ب . وهذا المعنى يدل على الحدين ا و ب مرتبطين بطريقة معينة ، وأن « ا و ب » هما الحدان المرتبطان بتلك الطريقة . وبذلك يكون « ا و ب » الفصل ، ولكنه متميز عن فصل التصور ، وعن تصور الفصل .

ومع ذلك فإن مفهوم الواو لا يدخل في معنى الفصل ، لأن الحد المفرد فصل ولو أنه ليس عطفاً عددياً . فإذا كان ي فصل تصور ، وكانت قضية واحدة فقط من صورة « س هـ » « هـ » صادقة ، إذن « جميع الياءات » تصور يدل على حد مفرد ، وهذا الحد هو الفصل الذى تكون « جميع الياءات » تصوره . وهكذا فإن ما يبدو جوهرياً للفصل ليس المفهوم من « الواو » بل ما يدل عليه تصور الفصل . وهنا يجرنا إلى وجهة نظر المفهوم للفصول .

٧٢ - لقد اتفقنا في الباب السابق على عدم وجود طرق مختلفة للدلالة وإنما توجد فقط أنواع مختلفة من التصورات الدالة وما يوازئها من الأنواع المختلفة

للأشياء المدلول عليها . وناقشنا نوع الشيء المدلول عليه والذي يكون الفصل ،
وعلينا الآن أن ننظر في نوع التصور الدال .

إن اعتبار الفصول الناشئ عن التصورات الدالة أهم بكثير من الاعتبار الماصدق
وذلك من وجهين ، الأول أنه يسمح بما يستبعده الآخر « عمليا » ، أى قبول الفصول
غير المتناهية ؛ والثاني أنه يسمح بإدخال التصور الضفرى للفصل . وقبل مناقشة
هذه الأمور علينا أن نتفحص مسألة منطقية بحثة على شيء من الأهمية .

إذا كان ي فصل تصور ، فهل التصور « جميع اليايات » قابل للتحليل
إلى مكوّناتيه ، جميع وى ، أو هو تصور جديد محدد بعلاقة معينة مع وى ،
وليس أعقد من وى ذاته ؟ ولنبدأ بملاحظة أن جميع « اليايات » مرادفة لقولنا
« اليايات » على الأقل تبعاً للاستعمال الشائع للجمع ؛ فيرجع سؤالنا إذن إلى
معنى الجمع . ولا شك أن لفظة « جميع » لها معنى محدد ، ولكن يبدو من المشكوك
فيه جداً أنها تعنى أكثر من الإشارة إلى العلاقة . ذلك أن « جميع الناس »
و « جميع الأعداد » تشترك في هذه الحقيقة وهى أن لها علاقة ما لفصل تصور
هو الإنسان والعدد على التوالى ، ولكن يبدو من الصعب جداً عزل أي عنصر من
الجمعية all-ness منهما ، اللهم إلا إذا اعتبرنا هذا العنصر مجرد الواقع من
أنهما تصوران لفصلين . يبدو إذن أن « جميع اليايات » لا يصح تحليلها إلى
جميع وى ، وأن اللغة في هذه الحالة كما في غيرها مضللة . وتنطبق الملاحظة
ذاتها على كل ، وأي ، وبعض ، وأحد^(١) ، وأل .

وقد يُظن أن الفصل ينبغي أن ينظر إليه لا على أنه مجرد عطف عددي
للحدود ، بل على أنه عطف عددي يدل عليه تصور الفصل . ومع ذلك فلن
يخدم هذا التعقيد أى غرض مفيد ، فيما عدا الاحتفاظ بالتمييز الذي ذهب
إليه « بيانو » بين الحد المفرد وبين الفصل الذى لا يشمل إلا هذا الحد — وهو تمييز
يسهل إدراكه حين يتطابق الفصل مع فصل التصور ، ولا يكون مقبولا من

(١) لفظة a هى أداة التنكير فى الإنجليزية ولا يوجد ما يقابلها فى اللغة العربية .

وجهة نظراً للفصول . ومن الواضح أن العطف العدديّ المعتبر مدلولاً به إما أن يكون نفس الشيء غير المعتبر ، أو أنه مركب من الدلالة والشيء المدلول عليه ، وليس هذا الشيء إلا ما نعنيه بالفصل .

أما فيما يختص بالفصول غير المنتهية ، مثل فصل الأعداد ، فلا بد من ملاحظة أن التصور « جميع الأعداد » ولو أنه ليس بذاته مركباً تركيباً لا متناهياً إلا أنه يدل على موضوع مركب تركيباً لا متناهياً . هذا هو السر العميق في مقدرتنا على معالجة موضوع اللانهاية . ولو وُجد تصور مركب تركيباً لا متناهياً فلن يكون في مقدور العقل البشري أن يستوعبه . أما المجموعات اللانتهية فنظراً لفكرة الدلالة فقد يمكن بحثها دون إدخال أى تصور ذي تركيب لا متناه . وينبغي أن نأخذ في بالنا هذه الملاحظة عند مناقشة موضوع اللانهاية في الأجزاء الأخيرة من هذا الكتاب ، ولو ذهب عن بالنا فسنجد جواً سحرانياً يجعل النتائج التي نحصل عليها تبدو مشكوكاً فيها .

٧٣ - وتتصل بالفصول الصفرية صعوبات عظيمة ، وبوجه عام بفكرة اللاشيء . ومن الواضح أن ثمة تصوراً هو اللاشيء ، وفي بعض المعاني أن اللاشيء هو شيء ما . والواقع أن هذه القضية : « اللاشيء ليس لا شيء » في الإمكان ولا ريب تأويلها بحيث تكون صادقة - وهذه نقطة ينشأ عنها التناقض الذي ناقشه أفلاطون في محاوره السوفسطائي . أما في المنطق الرمزي فالفصل الصفرى هو ذلك الذى ليس له حدود على الإطلاق ، ومن الضروري من الناحية الرمزية إدخال مثل هذه الفكرة . وعلينا الآن أن ننظر أيمكن تجنب التناقضات التي تنشأ نشأة طبيعية مما سبق .

ومن الضروري أن ندرك تماماً أول كل شيء من أن تصوراً ما قد يدل ، ولو أنه لا يدل على شيء ، وهنا يحدث عندما تكون هناك قضايا يحدث فيها ذلك التصور المذكور ، ولا تدور تلك القضايا حول ذلك التصور ، بل تكون جميع مثل تلك القضايا كاذبة . أو قل إن التفسير السابق هو أول خطوة نحو

تعليل التصور الدال الذي لا يدل على شيء . ومع ذلك فليس هذا تفسيرا كافيا . خذ مثلا هذه القضية « الفيلان^(١) حيوانات » أو « الأعداد الأولى الزوجية ما عدا ٢ أعداد » ، فيظهر أن هاتين القضيتين صادقتان ، ويبدو أنهما لا تتعلقان بالتصورات الدالة بل بما تدل عليه هذه التصورات : ومع ذلك فها هنا استحالة ، لأن التصورات المذكورة لا تدل على شيء ما . يقول المنطق الرمزي إن هذه التصورات تدل على الفصل الصفر ، وأن القضايا المذكورة تقرر أن الفصل الصفر تشمله فصول أخرى . إلا أنه من وجهة نظر الماصدق الدقيقة عن الفصول والتي ذكرناها فيما سبق ينهى الفصل الذي ليس له حدود إلى لا شيء على الإطلاق : لأن ما كان مجرد جمع للحدود لا يمكن أن يقوم إذا ارتفعت جميع الحدود . ليس لنا إذن إلا أن نلتزم تفسيرا آخر للفصول ، أو نبحث عن طريقة نستغنى بها عن الفصل الصفر .

ويمكن إصلاح التعريف الناقص الذي ذكرناه عن التصور الدال دون أن يدل على شيء على النحو الآتي : فقد رأينا أن جميع التصورات الدالة فرع من فصول التصورات ، وإذا كان فصل تصور ، كانت « س هي ا » دالة القضية . ولن تدل التصورات الدالة المرتبطة بـ ا على شيء إلا عندما تكون « س هي ا » باطلة من جهة قيمة س . فهذا هو التعريف الكامل للتصور الدال الذي يدل على شيء ، وفي هذه الحالة سنقول إن فصل تصور صفر ، وأن « جميع ا » تصور صفر لفصل . ليست هناك إذن حاجة إلى نشأة صعوبات فنية في ظل مذهب مثل مذهب « بيانو » فصوله التي يسميها فصولا هي في الحقيقة فصول تصورات . أما عندنا فلا تزال أمامنا مشكلة منطقية حقة باقية .

وقد يمكن بسهولة تفسير هذه القضية « الفيلان حيوانات » على سبيل الزوم الصوري بأن معناها « س غول يلزم عنه أن س حيوان لجميع قيم س » . ولكننا حين بحثنا في الفصول قد افترضنا أن القضايا المشتمة على جميع أو أي

(١) Chimera كائن خرافي ، وترجمناه بالفيل في العربية لهذا السبب .

أو كل ولو أن فصلها متساوية نتيجة اللزوم الصوري إلا أنها متميزة عنها وتنشأ منها أفكار تحتاج إلى مناقشة مستقلة . وفي حالة الغيلان من السهل استبدال وجهة نظر المفهوم البحتة التي بمقتضاها يكون ما يقرر في الواقع عبارة عن علاقة بين محمولات ، وفي الحالة المذكورة تكون صفة الحيوان جزءاً من تعريف الصفة خرافية . مرة أخرى من الواضح أننا بصدد قضية يلزم عنها أن الغيلان حيوانات ، ولكنها ليست نفس القضية — والواقع فيما يختص بهذه الحالة ليس اللزوم متبادلاً . ويمكن بالسلب أن نعطي ضرباً من التفسير الماصدق فنقول : لا شيء مما يدل عليه القول لا يدل عليه حيوان . ولكن هذا التفسير غير مباشر جداً . صفوة القول يبدو من الأصوب استبعاد القضية أصلاً مع استبقاء القضايا الأخرى المتعددة التي تكون مكافئة لها إذا كانت الغيلان موجودة . سيشرع المنطقة الرمزيون الذين جربوا فائدة القول بالفصل الصفر أن هذه الوجهة من النظر رجعية . غير أنني لست معنياً في الوقت الحاضر بمناقشة ما ينبغي عمله في الحساب التحليلي المنطقي حيث يظهر لي أن ما جرى عليه العمل هو الأفضل ، بل الحقيقة الفلسفية المتصلة بالفصل الصفر . خلاصة القول إنه من بين مجموعة التفسيرات المتكافئة ذات الصيغ المنطقية الرمزية ، يعجز صنف التفسيرات المذكورة في الباب الحاضر والتي تعتمد على الفصول الواقعية إذا كنا بصدد فصول التصورات الصفر على أساس عدم وجود فصل صفر بالفعل .

ولعلنا نعود الآن إلى النظر في هذه القضية : « لا شيء » ليس « لا شيء » . وهي قضية من الواضح أنها صادقة ، ومع ذلك فإنها إذا لم تعالج بعناية أصبحت مصدر نقائص نعجز عن حلها . ذلك أن « لا شيء » تصور دال لا يدل على شيء . ولتصور الدال ليس بالطبع لاشيء ، نغني لا يُدرك عليه بنفسه . وهذه القضية التي تبدو مفارقة في التناقض لا تعني أكثر مما يأتي : لا شيء ، وهو التصور الدال ، ليس لا شيء ، أي ليس ما يدل بذاته . ولا يستتبع ذلك بأي حال وجود فصل صفر بالفعل : إذ لا يسمح فقط إلا بفصل التصور

الصفـر وتصور الفصل الصفـر .

وهنا نجد أنفسنا بإزاء صعوبة جديدة ، ذلك أن تساوى فصول التصورات كجميع العلاقات المنعكسة reflexive ، والمثالة ، والمتعدية transitive ، يشير إلى مطابقة مضمرة ، أى أنه يشير إلى أن لكل فصل تصور مع حد معين علاقةً توجد كذلك بين جميع فصول التصورات المتساوية وبين ذلك الحد . من جهة أن هذا الحد يختلف باختلاف ضروب فصول التصورات المتساوية ، ولكنه واحد بالنسبة للأفراد المتعدين لضرب واحد من فصول التصورات المتساوية . ويوجد هذا الحد في الفصل المقابل ، وذلك في جميع فصول التصورات التي ليست صفرا ، ولكن أين يمكننا أن نجده في فصول التصورات الصفـر؟ وثمة إجابات متعددة لهذا السؤال يمكن اصطناع أى واحد منها . فنحن إذ نعلم الآن ما الفصل ، فقد يمكن اتخاذ الحد الذى نريده فصل جميع فصول التصورات الصفـر ، أو جميع دوال القضايا الصفـر . وليست هذه فصولا صفرا ، بل فصولا حقيقية ، لها مع الفصول التصورات الصفـر نفس العلاقة . فلو شئنا الحصول على شئ يشبه ما سميناه في مكان آخر بالفصل ، إلا أنه يقابل فصول التصورات الصفـر ، فس نجد أنفسنا مضطرين حينما كان ذلك ضرورياً (كالحال في عد الفصول) إلى إدخال حد يتطابق مع فصول التصورات المتساوية ، وأن نستبدل حينما كان فصل فصول التصورات المساوى لفصل تصور معلوم بالفصل المقابل لفصل التصور ذاك . ولو أن الفصل المقابل لفصل التصور يتق أساسيا من الناحية المنطقية لكننا لا نحتاج إلى استعماله بالفعل في رموزنا . والواقع ، فإن الفصل الصفـر هو بنحو ما شبيه بالعدد غير المنطقتى في الحساب : فلا يمكن تفسيره بنفس المبادئ كغيره من الفصول . وإذا شئنا أن نقدم تفسيراً يشبه ذلك في مكان آخر ، فيجب أن نستبدل بالفصول أشياء أخرى أكثر تعقيدا - وفي الحالة التى نحن بصدها بعض الفصول المرتبطة بعلاقة مشتركة . وسيكون الغرض من هذا الإجراء فنيا قبل كل شئ ، غير

أن الفشل في فهم هذا الإجراء سيؤدي إلى صعوبات مستعصية في تفسير الرمزية . ويحدث باستمرار إجراء شبيه جداً بهذا في الرياضيات ، مثال ذلك كل تعميم للعدد . ولم تُفسر أى حالة حدث فيها هذا التعميم تفسيراً صحيحاً فيما أعرف سواء من الرياضيين أو من الفلاسفة . وحيث كنا سنصادف الكثير من الأمثلة في خلال هذا الكتاب فلا داعي للوقوف عند هذه النقطة في الوقت الحاضر ، فيما عدا التنبيه على حالة واحدة ممكنة من سوء الفهم . ليس ثمة دور يؤخذ من الكلام السالف ذكره عن الفصل الصفر ، لأن المعنى العام عن الفصل حين يوضع أولاً يؤدي إلى ما يسمى بالوجود ، ثم رمزياً بعد ذلك لا فلسفياً ، تحل محله فكرة فصل من فصول التصورات المتساوية ، وعندئذ نجد أنه في هذه الصورة الجديدة ينطبق على ما يناظر فصول التصورات الصفر ، ما دام هذا المناظر هو الآن ليس صفراً . ويوجد بين الفصول البسيطة وفصول التصورات المتساوية ارتباط الواحد بالواحد ، ويسقط في حالة وحيدة هي فصل فصول التصورات الصفر والذي لا يناظره أى فصل صفر . وهذه الحقيقة هي السر في جميع هذا التعقيد .

٧٤ - وعلينا الآن أن نناقش بطريقة أولية إلى حد ما مسألة أساسية جداً في فلسفة الحساب وهي : هل نعتبر الفصل المتواطي الحدود واحداً أو كثيراً ؟ لو أخذنا الفصل مساوياً ببساطة للعطف العددي « ١ ، ٢ ، ٣ ، إلخ » فقد يبدو من الواضح أنه كثير ، ومع ذلك فمن الضروري أن نتمكن من عد الفصول وكأن كلا منها واحداً ، وهذا ما تفعله عادة حين نتكلم عن فصل « ماً »^(١) . وهكذا يظهر أن الفصول تكون واحدة من جهة ، وكثيرة من جهة أخرى .

وقد تميل إلى مطابقة الفصل ككثير والفصل كواحد ، مثال ذلك جميع الناس والجنس البشري . وعلى الرغم من ذلك فحينما كان الفصل مشتملاً على أكثر من حد واحد فيمكن إثبات أن مثل تلك المطابقة غير مقبولة .

(١) في الأصل « class » ، بالتنكير . [المترجم] .

فتصور الفصل إذا كان دالاً على الفصل كواحد فليس هو ذاته أى واحد من تصور الفصل الذى يدل عليه ، وبمعنى آخر فصول جميع الحيوانات العاقلة والى تدل على الجنس البشرى كحد واحد مختلفة عن الناس هو الحد الذى يدل على الناس ، أى على الجنس البشرى ككثير . أما إذا كان الجنس البشرى مطابقاً للناس ، فيرتب على ذلك أن كل ما يدل عليه أحدهما فلا بد أن يدل عليه الآخر ، وبذلك تستحيل التفرقة المذكورة . وقد نميل إلى استنتاج أن التمييز الذى عقده «بيانو» ، بين الحد وبين الفصل الذى حده الوحيد هذا الحد ، يجب أن نتمسك به على الأقل فى حالة أن يكون الحد المذكور فصلاً .^(١) ولكنى أعتقد من الأصوب أن ننتهى إلى تمييز مطلق بين الفصل ككثير وبين الفصل كواحد ، وأن نذهب إلى أن الكثير كثير فقط وليس أيضاً واحداً . وقد يتطابق الفصل كواحد مع المجموع المركب من حدود الفصل ، مثال ذلك فى حالة الناس ، الجنس البشرى يكون الفصل كواحد .

ولكن أيمكننا الآن تجنب ذلك التناقض الذى كنا نخشاه دائماً ، نعى وجود شيء لا يمكن أن يتخذ موضوعاً منطقياً ؟ أما أنا شخصياً فلست أدرى أى سبيل للكشف عن تناقض محكم فى هذه الحالة . فى حالة التصورات كنا بصدد شيء واحد ، وكان ذلك واضحاً ، أما فى هذه الحالة فنحن يلزاه مركب قابل فى أساسه للتحليل إلى وحدات . فى مثل هذه القضية «ا و ب اثنان» لا يوجد موضوع منطقي ، لأن الحكم لا يلور على ا ولا على ب ، ولا على المجموع المركب منها ، بل يقوم فقط وبدقة على ا و ب . ومن هذا قد يبدو أن الأحكام لا يلزم أن تكون منصرفة إلى موضوعات مفردة ، بل قد تنصرف إلى موضوعات كثيرة ، وهذا يرفع التناقض الذى نشأ فى حالة التصورات من استحالة الحكم عليها إلا إذا تحولت إلى موضوعات . ولما كانت هذه

(١) هذه النتيجة وصل إليها فريج بالفعل من حجة مماثلة - انظر . Archiv für syst. Phil. I, p. 444. وراجع الملحق .

الاستحالة غير موجودة هنا ، لم ينشأ التناقض الذى كنا نخشاه .

٧٥ - وقد نسأل كما توحى بذلك المناقشات السابقة عن الأمر فى الأشياء التى يدل عليها قولنا : إنسان ، كل إنسان ، بعض الناس ، وأى إنسان ، أتكون هذه الأشياء واحداً أو كثيراً ، أو لا هذا ولا ذاك ؟ أما النحو فيعاملها جميعاً معاملة الواحد . ولكن الاعتراض الطبيعى على هذا الاعتبار هو : أى واحد ؟ لا شك أنه ليس سقراط ، أو أفلاطون ، أو أى شخص آخر معين . أفيمكن أن نستخلص من ذلك أن أحداً ليس مدلولاً عليه ؟ أو نستخلص أن كل واحد مدلول عليه ، وهذا يصدق فى الواقع على هذا التصور : « كل إنسان » . والذى اعتقده هو أن الواحد مدلول عليه فى كل حالة ، ولكن ذلك باستغراق متواطئ . فقولنا : أى عدد ليس ١ أو ٢ ، ولا أى عدد آخر معين . ومن أجل ذلك من السهل أن نستنتج أن أى عدد ليس أى عدد بالذات ، وهى قضية ولو أنها تظهر لأول وهلة متناقضة إلا أنها نشأت فى الواقع من إيهام لفظة « أى » ، ونعبر عنها بدقة أكثر حين نقول : « أى عدد ليس عدداً ما بالذات » . ومع ذلك فهناك ألغاز فى هذا الباب لم أعرف حتى الآن كيف أحلها .

وتبقى صعوبة منطقية تخص طبيعة الكل المركب من جميع الحدود فى فصل . وثمة قضيتان يبدو أنهما يسيستان بذاتهما : (١) الكلان المركبان من حدود مختلفة يجب أن يكونا مختلفين . (٢) الكل المركب من حد واحد فقط هو ذلك الحد الواحد . ويترب على ذلك أن الكل المركب من فصل معتبر كأنه حد واحد هو ذلك الفصل المعتبر كأنه حد واحد ، وينطبق بناء على ذلك مع الكل المركب من حدود الفصل . غير أن هذه النتيجة تتناقض مع أول مبدأ يبين بذاته فرضناه . والجواب فى هذه الحالة ليس مع ذلك صعباً ، ذلك أن أول المبدأين لا يكون صدقه عاماً إلا حين تكون جميع الحدود التى يتركب الكلان منها بسيطة . ثم أى كل إذا كان مشتملاً على أكثر من جزأين فى الإمكان تحليله بطرق كثيرة ، وتكون الأجزاء الناشئة عن ذلك مختلفة

باختلاف طرق التحليل بشرط ألا تخفى في التحليل إلى غير نهاية . وهذا يثبت أن مجموعات مختلفة من الأجزاء قد يتركب منها نفس الكل ، وبذلك تتحل صعوبتنا .

٧٦ - ويجب أن نقول شيئاً عن العلاقة بين الحد وبين الفصل الذي يكون فرداً من أفرادها ، وعن العلاقات المتعددة المرتبطة بذلك . وسنسمى إحدى هذه العلاقات المرتبطة ϵ ، وسيكون لها دور أساسى فى المنطق الرمضى . ومع ذلك فالأمر متروك لاختيارنا فى اتخاذ أى العلاقتين واعتباره أساسياً من الناحية الرمزية .

من الناحية المنطقية العلاقة بين الموضوع والمحمول هى العلاقة الأساسية التى يُعبر عنها قولنا : « سقراط إنسانى » - وهى علاقة كما رأينا فى الباب الرابع غريبة من جهة أن المتعلق relatum لا يمكن اعتباره حداً فى القضية . وأول علاقة تنشأ عن هذه هى تلك التى تجرى فى هذه العبارة : « سقراط له إنسانية » وهى التى تتميز بأن العلاقة فيها حد . ويأتى بعد ذلك : « سقراط إنسان » . وهذه القضية المثيرة كعلاقة بين سقراط وبين التصور إنسان هى تلك التى يعدها « ييانو » أساسية ، والرمز الذى يضعه وهو ϵ يعبر عن العلاقة "is a" بين سقراط وإنسان ، والمعبّر عنها بقولنا فى العربية « هو » ^(١) . وما دمنا نستعمل فصول التصورات محل الفصول فى رموزنا فلا اعتراض على الإجراء السابق . ولكن إذا أعطينا ϵ هذا المعنى ، فلا ينبغي أن نفترض أن رمزين يمثلان فصلي تصورين متساويين ، فهما معاً يمثلان شيئاً واحداً بالذات . ولنرجع إلى العلاقة بين سقراط والجنس البشرى ، أى بين حد وفصله المعتبر ككل ، وهذا هو الذى يعبر عنه بقولنا : « سقراط ينتمى إلى الجنس البشرى » . فهذه العلاقة قد يمكن أن يمثلها الرمز ϵ . ومن الواضح أن الفصل ما دام كثيراً ، ما عدا

(١) فى المنطق القديم تسمى العلاقة رابطة . ويلاحظ أن القضية فى اللغة العربية تكون الرابطة مضمرة ، وإذا صرح بها قيل « سقراط هو إنسان » ، أما الرابطة فى اللغة الإنجليزية فهى فعل الكينونة ولذلك يقال Socrates is a man . ولذلك لزم التنويه . (المترجم)

إذا كان ذا حد واحد ، فلا يمكن من حيث هو كذلك أن يمثله حرف واحد ، ومن ثم ففي أى منطق رمزى يمكن لا يمكن للحروف التى تقوم مقام الفصول أن تمثل الفصول ككثير ، بل لا بد أن تمثل إما فصول التصورات ، أو الكلات المركبة من فصول ، أو أى أشياء أخرى مفردة مرتبطة بعضها ببعض . من أجل ذلك لا يمكن أن تمثل ε العلاقة بين الحد وفصله ككثير ، وإلا كان ذلك علاقة بين حد واحد وحدود كثيرة ، لا علاقة بين حدين كتلك التى نريدها . وهذه العلاقة يمكن أن نعبر عنها بقولنا : « سقراط واحد من الناس » . ولكن هذه العلاقة على أى حال لا يمكن أن تؤخذ على أنها تدل على معنى ε .

٧٧ — وهناك علاقة كانت قبل « بيانو » تكاد بالإجماع تختلط بالرمز ε ، هى علاقة الاستغراق بين الفصول كما هى الحال مثلا بين الناس والفانين . وهذه علاقة مشهورة من حيث إنها تقع فى الصورة التقليدية للقياس ، وكانت موضع نزاع بين المفهوم والمصادق ، وكثر حولها النقاش حتى أصبح من الغريب أن يبقى شيء يقال عنها . ويذهب التجريبيون إلى أن مثل هذه القضايا تدل على تعداد فعل للحدود التى يشملها الفصل مع تقرير انتساب الحدود للفصل الذى يشملها . ويجب أن يعتبر التجريبيون ، فيما يلزم عن مذهبهم ، أن مسألة كون جميع الأعداد الأولية صحيحة مسألة مشكوك فى صحتها ما داموا لا يجمعون على القول بأنهم قد فحصوا جميع الأعداد الأولية عدداً عدداً . أما المعارضون لم فقد ذهبوا على العكس منهم عادةً إلى أن المقصود هو علاقة كل وجزء بين المحمولات ، ولكن هذه العلاقة قد تحولت إلى الاتجاه المقابل عن العلاقة بين الفصول : أى أن المحمول المعرف للفصل الأكبر جزء من من الأصغر . وتبدو هذه النظرة أقرب إلى القبول من الأخرى ، وحيثما وجدت مثل هذه العلاقة بين المحمولات المعرفة ترتبت عليها علاقة الاستغراق ومع ذلك فيمكن إثارة اعتراضين ، الأول أنه فى بعض حالات الاستغراق لا توجد مثل هذه العلاقة بين المحمولات المعرفة ، والثانى أنه فى أى حالة فالمقصود

هو علاقة بين الفصول لا علاقة بين محمولاتها المعرفة . ويمكن بسهولة إثبات النقطة الأولى بالأمثلة . فالتصور « العدد الأول الزوجي » لا يشمل هذا التصور وهو « عدد صحيح بين ١ ، ١٠ » كجزء داخل في تكوينه ، والتصور « ملك إنجليزي قطعت رأسه » لا يشمل هذا التصور « الناس الذين ماتوا في عام ١٦٤٩ » ؛ وهكذا في أمثلة كثيرة واضحة . ويمكن الرد على ذلك بقولنا إنه ولو أن علاقة المحمولات المعرفة ليست علاقة كل وجزء إلا أنها شبيهة في كثير أو قليل بعلاقة اللزوم ، وهي دائماً تلك التي تعنيها في الواقع قضايا الاستغراق . وأعتقد أن مثل هذه النظرة تمثل ما يقوله أفضل أنصار المفهوم ، ولا يعنى إنكار أن مثل هذه العلاقة المذكورة توجد دائماً بين محمولات معرفة لفصلين يشتمل أحدهما على الآخر . ثم تبقى النقطة الثانية مما سبق ذكره صحيحة بالنسبة إلى أى تفسير بالمفهوم . ذلك أننا حين نقول إن الناس قانون ، فن الواضح أننا نقول شيئاً ماً عن الناس لا عن التصور « الإنسان » أو المحمول « إنسانى » . فالسؤال الذى نواجهه إذن هو ماذا نقوله بالضبط ؟

لقد ذهب « بيانو » فى طبعات سابقة من كتابه المسمى *Formulaire* إلى أن ما تقرر هو اللزوم الصورى أى « س إنسان يلزم عنه أن س فان » . ولا شك أن هذا متضمن ، ولكنى لا أستطيع إقناع نفسى بأنها القضية ذاتها ، إذ فى هذه القضية ، كما رأينا فى الباب الثالث ، من الجوهرى أن تأخذ س جميع القيم لا تلك فقط الخاصة بالناس . أما حين نقول : « جميع الناس قانون » فيبدو من الواضح أننا نتكلم فقط عن الناس لا عن جميع الحدود الأخرى المتخيلة . وقد يمكن من أجل بلوغ علاقة حقيقية للفصول اعتبار الحكم وكأنه حكم كل وجزء بين الفصلين المعتبر كل منهما كأنه حد واحد . أو لعلنا نستطيع أن نخلع على هذه القضية صورة ماصدية بحثة بأن نجعل معناها كالآتى : « كل ، أو أى » إنسان فان . وتثير هذه القضية مسائل غاية فى الطرافة تخص نظرية الدلالة : إذ يبدو أنها تقرر تطابقاً . ومع ذلك فن

الواضح أن ما يدل عليه كل إنسان يختلف عما يدل عليه فان . وهذه الأسئلة على ما فيها من طرافة لا نستطيع المضى في بحثها هنا . ويلزمنا فقط أن نذكر بوضوح ما هي القضايا المتعددة المتكافئة التي تنشأ عن تداخل فصل في الآخر . والصورة الأكثر أهمية للرياضيات هي ولا شك تلك التي تتعلق باللزوم الصوري مما سنفرد له مناقشة جديدة في الباب المقبل .

وعلينا أخيراً أن نتذكر أن الفصول يجب أن تشتق عن طريق هذه الفكرة ، وهي «مثل» من مصادر أخرى خلاف القضايا الحولية (ذات الموضوع والحمول) وما يكافئها . وأى دالة قضية يكون فيها الحكم الثابت قائماً على حد متغير فيجب اعتبارها كما وضعنا في الباب الثاني سبيلاً إلى ظهور فصل من القيم تحققها ، ويحتاج هذا الموضوع إلى مناقشة مسألة الأحكام ، ولكن إحدى المناقضات الغريبة الشأن والتي تستلزم العناية بالتمييز المقصود من الحديث في هذا الباب قد يمكن المبادرة بذكرها فوراً .

٧٨ — معظم المحمولات العادية على خلاف سائر المحمولات لا يمكن أن تحمل على ذاتها، ولو أننا حين نستعمل المحمولات السلبية نجد كثيراً منها يصلح أن تحمل على ذاتها . وإحدى هذه الحالات، ونعني بها قبول الحمل أو صفة كونها محمولا، ليست سلبية ، فقبول الحمل كما هو واضح أن يكون قادرا على الحمل، أى أن يكون محمولا على ذاته ، ولكن معظم الأمثلة المشهورة سلبية ، كما نقول للإنسانية هي لا إنسانية ، وهلمجرا . فالمحمولات التي لا تكون قادرة على الحمل على ذاتها ليست بناءً على ذلك إلا طائفة من جملة المحمولات ، ومن الطبيعي أن نفترض أنها تكون فصلا له محمول معروف . فإذا كان الأمر كذلك فلنفحص عن هذا المحمول المعروف أينتمى إلى الفصل أم لا ، فإذا كان متميا للفصل فليس يقبل الحمل على ذاته إذ ذلك خاصة الفصل المميزة له . أما إذا لم يقبل الحمل على ذاته فلن يتنى إلى الفصل الذي هو بالنسبة إليه المحمول المعروف مما يناقض القرض السابق . ومن جهة أخرى إذا لم يكن متميا للفصل

الذى هو له المحمول المعرف ، فلن يكون قابلا للحمل على ذاته ، أى أنه ليس أحد تلك المحمولات ، ويترتب على ذلك أنه يمتنى إلى الفصل الذى هو له المحمول المعرف — وهذا يناقض القرض مرة أخرى . فالتناقض يلزم عن كلا الفرضين . وسأعود إلى الحديث عن هذا التناقض فى الباب العاشر ، ولم أتكلم عنه الآن إلا لأبين أنه لا يحتاج فى تمييزه إلى دقة عميقة .

٧٩ — وخلاصة ما ذكرناه من مناقشة للموضوع طالت بعض الشيء هى أن الفصل فى رأينا لا بد أن يفسر جوهريا بالمصدق ، فإما أن يكون حدا واحدا ، وإما أن يكون من ذلك الضرب من التأليف بين الحدود حين ترتبط بهذه الأداة وهى «الواو» . إلا أنه من الناحية العملية لا النظرية لا يمكن أن تنطبق هذه الطريقة الماصدية البحتة إلا على الفصول المتناهية . فجميع الفصول متناهية كانت أم غير متناهية يمكن الحصول عليها كأشياء تدل عليها فصول التصورات فى صيغة الجمع — مثل الناس ، الأعداد ، النقطة ، ألخ . ونحن بدأنا القول بالمحمولات ميزنا نوعين من القضايا النموذج لهما : « سقراط إنسانى » و « سقراط له إنسانية » ، فالأولى تستعمل «إنسانى» كمحمول ، والثانية كحد لعلاقة . ومع أن هاتين القضيتين فى غاية الأهمية منطقيا إلا أنهما تهمان الرياضية كما تهتم بغيرهما من مشتقاتهما . ثم بدأنا من إنسانى فيزنا (١) فصل التصور إنسان الذى يختلف اختلافا يسيرا ، إن اختلف ، عن إنسانى (٢) التصورات المتعددة الدالة مثل « جميع الناس » و « كل إنسان » ، « أى إنسان » ، « إنسان » و « إنسان مآ » (٣) الأشياء التى تدل عليها هذه التصورات . وقلنا إن التصور الذى يدل عليه قولنا جميع الناس يسمى الفصل ككثير ، بحيث يسمى جميع الناس تصور الفصل (٤) الفصل كواحد ، أى الجنس البشرى . وحصلنا أيضاً على تصنيف للقضايا المتصلة بسقراط يعتمد على التميزات المذكورة ويكاد يوازىها . (١) « سقراط هو إنسان » ^(١) ينطبق تقريبا إن لم يكن تماماً على قولنا

« سقراط له إنسانية » . (٢) « سقراط هو إنسان » ^(١) قضية تعبر عن التطابق بين سقراط وواحد من الحدود التي يدل عليها المحمول إنسان (٣) « سقراط واحد من الناس » قضية تثير صعوبات ناشئة عن كثرة الناس (٤) « سقراط يسمى للجنس البشرى » هي القضية الوحيدة التي تعبر عن العلاقة بين الفرد وفصله ، وتأخذ الفصل كواحد لا ككثير طبقا لما تتطلبه إمكانية العلاقة . وذكرنا أن الفصل الصفر الذى ليس له حدود خرافة ، على الرغم من وجود فصول تصورية صفر . وقد ظهر من خلال المناقشة أنه على الرغم من أى بحث رمزى يجب أن ينظر إلى حد كبير فى الفصول التصورية والمفهوم ، فإن الفصول والمصادق من الناحية المنطقية أكثر أساسية لمبادئ الرياضة ، ويمكن اعتبار هذه النتيجة ممثلة لجوهر مقصودنا من هذا الباب .

الباب السابع

دوال القضايا

٨٠ - حاولنا في الباب السابق أن نبين نوع الشيء الذى يسمى الفصل ، ثم اعتبرنا القصول على أنها مشتقة من القضايا الحملية وذلك لأسباب تتعلق بمناقشة الموضوع . ولم يؤثر ذلك فى نظرتنا إلى فكرة الفصل ذاته ، ولكننا إذا تمسكنا بها فقد تقيد إلى حد كبير تعميم الفكرة . والأغلب أنه من الضروري اعتبار الفصل شيئاً لا يعرف بواسطة القضية الحملية ، وتفسير هذه الضرورة نجده فى نظرية الأحكام ، والإشارة بقولنا « مثل » .

أما الفكرة العامة عن الحكم ، فقد سبق شرحها عند الكلام على اللزوم الصورى ؛ أما فى هذا الباب فسنفحص فحصاً تقدياً عن مجالها وشرعيتها ، كما سنفحص عن صلتها بالفصول و: « مثل » . وهذا الموضوع زاخر بالصعوبات وسأعرض المذاهب التى أنوى الدفاع عنها على الرغم من أن تقى بصوابها محدودة .

وقد يبدو لأول وهلة أن فكرة « مثل » مما يقبل التعريف ، فقد جرى « بيانو » بالفعل على تعريف هذه الفكرة بالقضية الآتية : « كل س مثل س هى ا فى الفصل ا » . وبصرف النظر عن اعتراضات أخرى تدرك لأول وهلة فإننا نلاحظ أن الفصل الذى حصلنا عليه بقولنا « مثل » هو الفصل الحقيقى مأخوذاً من ناحية الماصدق ككثير ، على حين أن ا فى القضية « س هى ا » ليست الفصل بل فصل التصور . ولذلك كان من الضرورى صورياً إذا كان علينا قبول طريقة بيانو أن نضع بدلاً من « كل س مثل كذا وكذا » الفصل التصورى الحقيقى « س مثل كذا وكذا » وهو الذى يمكن اعتباره حاصلًا من المحمول

« مثل كذا وكذا » ؛ أو الأولى أن نقول « في حالة كون س مثل كذا وكذا » .
وهذه الصورة الأخيرة ضرورية ، لأن كذا وكذا دالة قضية تشمل س . ولكن
حتى مع إجراء هذا التصحيح الصوري البحت فيبقى أن « مثل » يجب في الأغلب
أن توضع قبل هذه القضايا كقولنا س ع | حيث تكون ع هي علاقة معينة
و | ا حد معين . ولا نستطيع رد هذه القضية إلى الصورة « س هي أ » دون
استعمال « مثل » ، لأننا إذا سألنا عن أ ماذا يجب أن تكون ، فالجواب هو :
أ يجب أن تكون بحيث يكون لكل حد من حدودها لا غير تلك العلاقة ع
إلى أ . ولنضرب أمثلة عن الحياة اليومية : أبناء إسرائيل فصل « معرف » بعلاقة
معينة مع إسرائيل ، ولا يمكن أن يعرف الفصل إلا إذا كان للحدود هذه العلاقة .
ويمكن القول على وجه التقريب إن « مثل » تكافئ « الذي » ^(١) ، وتقوم مقام
المعنى العام من تحقيق دالة القضية . غير أننا نستطيع الذهاب أبعد من ذلك
فتقول : إذا فرضنا فصلا هو أ فلا نستطيع أن نعرف بحدود أ فصل القضايا
« س هي أ » لقيم س المختلفة . ومن الواضح أن ثمة علاقة بين كل من هذه
القضايا وبين س التي تقع فيها ، وأن العلاقة المذكورة محددة حين تكون أ
معينة . ولنسم العلاقة ع ، فيكون أى شيء متعلق به بالنسبة إلى ع فهو قضية من
الصف « س هي أ » ؛ ولكن هنا معنى « مثل » قد استعمل من قبل . ثم إن العلاقة
ع ذاتها إنما يمكن أن تعرف على أنها العلاقة التي تقوم بين « س هي أ » وبين
س لجميع قيم س ، ولكنها لا تقوم بين أي زوجين آخرين من الحدود . وهنا
تظهر « مثل » مرة أخرى . ونحب أن نذكر أن النقطة الهامة بوجه خاص في هذه
الملاحظات هي عدم قبول دوال القضايا للتعريف . فإذا سلمنا بهذه الأمور
أمكن بسهولة تعريف المعنى العام للدوال ذات القيمة الواحدة . وكل
علاقة كثير بواحد ، أى كل علاقة فيها لمتعلق به معين referent متعلق
relatum واحد فقط ، فإنها تعرف دالة ، ذلك أن المتعلق هو دالة المتعلق به

التي تعرفها العلاقة المذكورة . ولكن حيث تكون الدالة قضية فإن المعنى الناشئ عن ذلك يكون مفروضاً من قبل في الرمز بحيث لا يمكن تعريفه بهذا الرمز دون الوقوع في دور ، لأن التعريف العام للدالة المذكور من قبل قد استخدم كذلك دوال القضايا . أما في حالة القضايا التي من هذا الصنف « س هي ا » ، فلو سألنا ما القضايا التي من هذا الصنف فلا جواب إلا أن نقول : « جميع القضايا التي يقال فيها عن حد ما إنه ا » ، وهنا يظهر ثانياً المعنى المطلوب تعريفه .

٨١ - هل يمكن للعنصر اللامعروف المتضمن في دوال القضايا أن يتطابق مع حكم ، وكذلك مع معنى كل قضية تشتمل على حكم معين ، أو مع حكم ينسب إلى كل حد ؟ وعندى أن البديل الوحيد لذلك هو قبول المعنى العام لدالة القضية نفسه على أنه لا يمكن تعريفه ، وهذا لا شك أفضل سبيل يحقق أغراضنا الصورية . أما فلسفياً فالمعنى يظهر لأول وهلة قابلاً للتحليل ، وعلينا أن نفحص عن هذا المظهر أخادع هو أم لا .

لقد رأينا عند مناقشة الأفعال في الباب الرابع أن القضية حين تحلل تماماً إلى أجزائها البسيطة فإن هذه الأجزاء إذا ركبت معاً فلا تعيد تكوينها . وقد نظرنا كذلك في تحليل غير تام للقضايا إلى موضوع وحكم ، ورأينا أن هذا التحليل لا يهدم القضية كثيراً . حقاً إن مجرد وضعنا موضوعاً بجوار حكم لا يكون قضية ، ولكن ما يلبث الحكم أن يقال بالفعل على الموضوع حتى تعود القضية إلى الظهور . والحكم هو كل ما يبقى من القضية بعد حذف الموضوع ، ويبقى الفعل فعلاً يقال ولا يتقلب اسم فاعل . أو على أى حال يحتفظ الفعل بتلك العلاقة الغريبة التي لا يمكن تعريفها مع الحدود الأخرى من القضية مما يميز العلاقة المتعلقة من نفس العلاقة حين ننظر إليها نظراً مجرداً . هذه الفكرة من الحكم ما مداها وما شرعيتها هي التي ستقوم الآن بفحصها . هل يمكن اعتبار كل قضية حكماً له صلة بأى حد داخل فيها ، أو أنه لا بد من وجود قيود لصورة القضية والطريقة التي يكون الحد داخلها فيها ؟

في بعض الحالات البسيطة من الواضح أن تحليل القضية إلى موضوع وحكم أمر مشروع ، ففي قولنا « سقراط إنسان » يمكننا ببساطة تمييز سقراط وما يقال عليه ، ويجب أن نسلم دون تردد أن الشيء نفسه قد يقال على أفلاطون أو أرسطو. وهكذا يمكننا اعتبار فصل من القضايا يشمل هذا الحكم ، وهذا هو الفصل الذي عدده النموذجي يُمثَّل بقولنا : « س هو إنسان » . ولا بد من ملاحظة أن الحكم يجب أن يظهر كحكم لا كحد . مثال ذلك : « أن يكون المرء إنسانا هو أن يتعذب » قضية تحتوى على نفس الحكم ، ولكنه قد استعمل كحد ، وهذه القضية لا تنتمى إلى الفصل الذى نبحت فيه . أما في حالة القضايا التى تقرر علاقة ثابتة مع حد ثابت فإن التحليل يبدو كذلك غير منكور. مثال ذلك : ما طوله أكثر من ياردة ، حكم محدد تماما ، ويمكننا النظر في فصل القضايا التى يحصل فيها هذا الحكم والتى ستمثلها دالة القضية « س طولها أكثر من ياردة » . وفي مثل هذه العبارات كقولنا : « الثعابين التى طولها أكثر من ياردة » يظهر الحكم واضحا جدا ، لأنه يرجع هنا صراحة إلى موضوع متغير ، ولا ينسب إلى أى موضوع معين . وعلى ذلك إذا كانت ع علاقة ثابتة و احداً ثابتاً ، كانت . . . ع احكاما معيناً تماماً (وضعنا فقط قبل ع إشارة إلى المكان بالذى يجب أن يوضع فيه الموضوع حتى تم القضية) . وقد يشك في أمر القضية العلاقة أيمكن اعتبارها حكماً تختص بالمتعلق . وعندى أن هذا ممكن ما عدا في حالة القضايا الحملية ، ومع ذلك فيحسن تأجيل هذه المسألة إلى أن نناقش العلاقات ^(١) .

٨٢ - ونمة مسائل أكثر صعوبة يجب أن ننظر الآن فيها . هل مثل هذه القضية : « سقراط إنسان فسقراط فان » أو « سقراط له زوجة فسقراط له أب » حكم يقال على سقراط أو لا ؟ مما لا شك فيه أننا إذا استبدلنا متغيراً بسقراط لحصلنا على دالة قضية . الواقع أن صدق هذه الدالة لجميع قيم المتغير

هو الحكم في الزوم الصورى المناظر الذى لا يقرر كما يظن لأول وهلة علاقة بين دالتى قضيتين . وقد كان غرضنا إذا أمكن تفسير دوال القضايا بواسطة الأحكام ، ومن أجل ذلك إذا استطعنا تحقيق هذا الغرض فيجب أن تكون القضايا السالفة الذكر أحكاماً تختص بسقراط . ومع ذلك فثمة صعوبة كبيرة جداً في اعتبارها كذلك . فنحن نحصل على الحكم من القضية بمجرد حذف أحد حدودها . ولكننا حين نحذف سقراط نحصل على « . . . إنسان ف . . . فان » . ففي هذه الصيغة من الضرورى حين نعيد القضية أن يحل نفس الحد في الموضوعين اللذين تشير النقط فيهما إلى ضرورة الحد . ولا يهم أى حد نختاره ولكن يجب أن يكون متطابقاً في الموضوعين . ومع ذلك فلا أثر يظهر لهذا الطلب الضرورى في الحكم الذى يجب أن يكون ، ولا أثر يمكن أن يظهر ما دام كل ذكر للحد الذى سنضعه فهو بالضرورة محذوف . حين نضع س لتحل محل المتغير ، فإن الحد الذى سندخله يتعين بتكرار الحرف س ، ولكن في الصورة الحكمية لا يمكن الحصول على مثل هذه الطريقة . ومع ذلك فقد يبدو لأول وهلة من العسير إنكار أن القضية المذكورة تخبرنا واقعا « عن » سقراط ، وأن نفس الواقع صادق عن أفلاطون ، أو مربى البرقوق ، أو العدد ٢ . مما لا ريب فيه أننا لا نستطيع إنكار أن : « أفلاطون إنسان فأفلاطون فان » هى من وجه أو من آخر نفس دالة أفلاطون ، كالحال في القضية السابقة عن سقراط . والتأويل الطبيعى لهذه العبارة هو أن لإحدى القضيتين مع أفلاطون نفس العلاقة التى للأخرى مع سقراط . ولكن هذا التأويل يحتاج إلى أننا لا بد أن نعتبر الدالة المذكورة للقضية معرفة بواسطة علاقتها بالمتغير . ومع ذلك فإن مثل هذه النظرة تحتاج إلى دالة قضية أكثر تعقيداً من تلك التى نبحث فيها . إذا مثلنا « س إنسان يلزم عنها أن س فان » بقولنا « س فإن النظرة المذكورة تذهب إلى أن س » هى الحد الذى له مع س العلاقة ع ، حيث تكون ع هى علاقة معينة . والتعبير الصورى لهذه النظرة هو كما يأتي :

لجميع قيم s ، s ، s مطابقة q s ، تكافؤ قولنا « s له العلاقة ع مع s » . ومن الواضح أن هذا لا يصلح تفسيراً ما دام فيه من التعقيد أكثر مما يفسره . وقد يبدو من ذلك أنه لعل للقضايا صورة معينة ثابتة تعبر عنها هذه الحقيقة ، وهي أنها حالات لدالة قضية معينة مع عدم إمكان تحليل القضايا إلى عامل ثابت وآخر متغير . وهذه وجهة نظر غريبة وصعبة ، لأن ثبات الصورة في جميع الحالات الأخرى تُرَدُّ إلى ثبات العلاقات ، أما الثبات الداخلي هنا ففروض من قبل في معنى ثبات العلاقة ، ولا يمكن من أجل ذلك تفسيره بالطريقة المألوفة .

وأظن أن النتيجة ذاتها تستخلص من حالة المتغيرين . وأبسط مثال لهذه الحالة هو s ع s ، حيث تكون ع علاقة ثابتة ، و s و s متغيران مستقلان . ويبدو من الواضح أننا بصدد دالة قضية لمتغيرين مستقلين ، فليس ثمة صعوبة في إدراك معنى فصل جميع القضايا من صورة s ع s . ويدخل هذا الفصل — أو على الأقل يدخل جميع أفراد الفصل الصادقة — في معنى فصول المتعلقة بها والمتعلقات بالنسبة ل s ع ، وهذه الفصول نسلم بها دون تردد في مثل هذه الألفاظ مثل : الآباء والأبناء ، السادة والعبيد ، الأزواج والزوجات ، وأمثلة أخرى لا حصر لها من الحياة اليومية ، وكذلك في المعاني المنطقية مثل المقدمات والنتائج ، الأسباب والمسببات ، وما إلى ذلك . فجميع مثل هذه المعاني تقوم على فصل القضايا التي من طراز s ع s حيث تكون ع ثابتة و s و s متغيرين . ومع ذلك فن الصعوبة بمكان اعتبار s ع s قابلة للتحليل إلى حكم ع مختص ب s و s وذلك لسبب كاف في ذاته هو أن هذه النظرة تهدم جهة العلاقة ، نعتي وجهتها من s إلى s ، تاركة إيانا مع ضرب من الحكم ميثال بالنسبة إلى s و s ، مثل : « العلاقة ع تقوم بين s و s » . الواقع أنه متى عُلِمَت علاقة وعلم حداها ثمة قضيتان ممكنتان متميزتان . فإذا أخذنا ع نفسها حكماً ، فإنها تصبح حكماً مبهماً :

فعند وضع الحدين يجب إذا شئنا تجنب الإبهام أن نقرر ما الحد المتعلق به وما الحد المتعلق . قد يحق لنا اعتبار . . . ع ص حكما كما شرحنا من قبل ، غير أن ص هنا قد أصبح ثابتا . وقد ننقض بعد ذلك في تغيير ص معتبرين فصل الأحكام . . . ع ص لقيم مختلفة ل ص ، ولكن هذه العملية لا تبدو متطابقة مع تلك التي يشير إليها التغير المستقل ل ص ، ص في دالة القضية ص ع ص . فضلا عن ذلك فإن العملية المقترحة تحتاج إلى تغيير عنصر في الحكم ، هذا العنصر هو ص في . . . ع ص ، وهذا المعنى هو في نفسه معنى جديد وصعب .

ويتصل بهذا الصدد نقطة غريبة جوهرية في الأغلب في الرياضة الفعلية ، وهي نقطة تنشأ من اعتبار علاقة الحد بنفسه . ولتكن دالة القضية ص ع ص التي فيها ع عبارة عن علاقة ثابتة ، فإن مثل هذه الدوال نحتاج إليها عند النظر في مثل هذه الأمثلة : فصل المتحريين ، أو العصامين . أو كذلك عند النظر في قيم المتغير الذي يكون مساويا لدالة معينة لنفسه ، وهذه كثيراً ما تكون ضرورية في الرياضة العادية . وفي هذه الحالة يبدو من الواضح إلى أقصى حد أن القضية تشتمل على عنصر يفقد حين يحل إلى حد هو ص وحكم هو ع . وهنا نعود ثانية إلى ضرورة قبول دالة القضية على أنها أساسية .

٨٣ — وهناك نقطة صعبة تنشأ من تغير الصور في قضية ماً . وليكن مثلاً جميع القضايا من الصنف ا ع ب حيث يكون ا ، ب حدين ثابتين ، وتكون ع علاقة متغيرة ، فلا يظهر هناك أى سبب للشك في أن فصل التصور « العلاقة بين ا ، ب ، مشروع ، ولا سبب للشك في وجود فصل مناظر ، ولكن هذا يحتاج إلى قبول دوال القضايا من مثل ا ع ب ، والتي هي فضلا عن ذلك كثيراً ما يحتاج إليها في الرياضة الفعلية ، كالحال مثلاً في حساب عدد علاقات كثير بواحد ، والتي تكون متعلقاتها والمتعلقات بها فصولاً معينة . ولكن إذا كان لا بد للمتغير أن يكون ذا مجال غير مقيد ، كما نحتاج عادة ،

فن الضروري التعويض بدالة القضية « ع علاقة يلزم عنها ا ع ب » . ففي هذه القضية نجد أن الزوم الحاصل مادي وليس صوريا . ولو كان الزوم صوريا فلن تكون القضية دالة ع بل تكون مكافئة للقضية (الكاذبة بالضرورة) وهي : « جميع العلاقات تصل بين ا ، ب » . ويوجه عام نتعرض للبحث في بعض القضايا مثل « ا ع ب يلزم عنها ع بشرط أن تكون ع علاقة » ، ونرغب في تحويل هذه القضية إلى لزوم صوري . فإذا كانت Φ (ع) قضية لجميع قيم ع ، فإن غرضنا يتحقق بوضع « إذا كانت ع علاقة ، يلزم عنها ا ع ب ، إذن Φ (ع) » . فهنا ع يمكن أن تأخذ جميع القيم ^(١) ، و « إذا » و « إذن » لزوم صوري ، أمّا ما يلزم عنهما فلزوم مادي . وإذا لم تكن Φ (ع) دالة قضية ، بل قضية فقط عندما تحقق ع دالة Ψ (ع) ، حيث تكون Ψ (ع) قضية لازمة عن « ع علاقة » لجميع قيم ع ، فإن لزومنا الصوري يمكن أن يوضع في هذه الصيغة : « إذا كانت ع علاقة يلزم عنها ا ع ب ، إذن لجميع قيم ع ، Ψ (ع) يلزم عنها Φ (ع) » ، حيث يكون كل من الزومين القرعيين ماديين . أما فيما يختص بالزوم المادي : « ع علاقة ، يلزم عنها ا ع ب » فهذه دائماً قضية ، على حين ا ع ب إنما تكون قضية حين تكون ع علاقة . ولن تصدق الدالة الجديدة للقضية إلا عندما تكون ع علاقة تصل بين ا و ب . أما إذا لم تكن ع علاقة ، فالمقدم كاذب ، والتالي ليس قضية ، وبناءً على ذلك يكون الزوم كاذبا . وعندما تكون ع علاقة لا تصل بين ا و ب ، فالمقدم صادق ، والتالي كاذب ، وبناءً على ذلك يكون الزوم أيضاً كاذباً . وإنما يكون الزوم صادقا حين يكون المقدم والتالي صادقين معاً . وهكذا عندما نعرف فصل العلاقات التي تصل بين ا و ب فالطريق الصحيح صوريا هو تعريفها باعتبار أنها القيم التي تحقق « ع علاقة يلزم عنها ا ع ب » — وهو لزوم مع أنه يشتمل على متغير إلا أنه ليس صوريا بل مادي ، من جهة أنه

(١) يجب وضع معنى آخر (غلاف القضية) لقولنا ا ع ب إذا لم تكن ع علاقة .

لا يتحقق إلا ببعض قيم ع الممكنة . وفي اصطلاح « بيانو » المتغير ع في هذه القضية حقيقي وليس ظاهريا .

والمبدأ العام المستعمل هو : إذا كانت Φ من إنعما هي قضية فقط لبعض قيم Φ من ، إذن « Φ من يلزم عنها Φ من » يلزم عنها Φ من ، قضية لجميع قيم Φ من ، وتكون صادقة ، وصادقة فقط ، حين تكون Φ من صادقة . (كلا اللزومين المستعملين ماديان) . وفي بعض الحالات تكون « Φ من يلزم عنها Φ من » مكافئة لدالة قضية أبسط من (مثل « ع علاقة » في المثال المذكور) والتي تحل عندئذ محلها ^(١) .

ودالة القضية مثل « ع علاقة يلزم عنها ا ع ب » تبدو أقل قبولاً للتحليل من أمثلة سابقة إلى ع وحكم يدور على ع ، ما دام يجب علينا أن نعين معنى لـ « ا . . ب » حيث يمكن ملء الفراغ بين الحدين بأى شيء ، وليس من الضروري أن يكون علاقة . ومع ذلك فهانذا نحاول بحسب لم نبخته بعد ، وهو الرابطة ذات الجهة . وقد يُشك في وجود مثل هذا الشيء على الإطلاق ، إلا أنه يبدو أن هذه العبارات مثل : « ع علاقة تصل من ا إلى ب » تبين أن استبعادها يؤدي إلى متناقضات . ومع ذلك فهذا الأمر يتعلق بنظرية العلاقات التي سنعود إلى بحثها في الباب التاسع (بند ٩٨) .

يظهر مما سبق قوله أن دوال القضايا يجب قبولها كحقائق أولية مطلقة . ويترتب على ذلك أن اللزوم الصوري ، واستغراق الفصول ، لا يمكن بوجه عام تفسيرهما بطريق علاقة تقوم بين أحكام ، ولو أنه حيث تنسب دالة قضية علاقة ثابتة إلى حد ثابت ، فإن التحليل إلى موضوع وحكم تحليل مشروع ، ولكنه بلا أهمية .

(١) ولو أن دالة القضية لجميع قيم المتغير تكون صادقة أو كاذبة ، إلا أنها في ذاتها ليست صادقة أو كاذبة ، من جهة أنها هي التي يدل عليها قولنا : أى قضية من الصنف المذكور ، وهذه نفسها ليست قضية .

٨٤ - وتبقى بضعة كلمات نذكرها عن اشتقاق الفصول من دوال القضايا .
 عندما نبحث في هذه القضية مثل السينات من مثل Φ س ، حيث تكون
 ب دالة قضية فإننا ندخل معنى ليس له في حساب القضايا إلا استعمالاً
 طفيفاً جداً - وأعني بذلك معنى « الصديق » . فنحن نعتبر القضايا الصادقة من
 بين سائر القضايا من صنف Φ س ، حيث تعطى القيم المناظرة لـ س الفصل
 المعروف بالدالة Φ س . وأظن أننا يجب أن نذهب إلى أن كل دالة قضية ليست
 صفةً فإنها تعرف فصلاً يدل عليه قولنا : « السينات من مثل Φ س » . وهكذا
 فهناك دائماً تصور الفصل ، أما فصل التصور المناظر فيسيكون المفرد « س
 من مثل Φ س » . ولكن قد نشك - الواقع التناقض الذي أنهيت به الباب
 السابق يدعو إلى الشك - أليكون هناك دائماً محمول لمثل تلك الفصول .
 وبصرف النظر عن التناقض المذكور فلعل هذه النقطة تبدو لفظية بحتة ،
 إذ يمكننا القول إن « أن تكون س من مثل Φ س » قد تؤخذ دائماً محمولاً . ولكن
 في ضوء ما ذكرناه من تناقض فيجب أن ننظر إلى جميع الملاحظات عن هذه
 المسألة بخدر ، وهي المسألة التي سترجع إليها في الباب العاشر .

٨٥ - وطبقاً لنظرية دوال القضايا التي دافعنا عنها هنا يجب ملاحظة
 أن Φ س ليس شيئاً منفصلاً متميزاً ، فهو يحيا في القضايا من الصيغة Φ س ،
 ولا يمكن أن تكون له حياة مع التحليل . وعندي شك عظيم في أن مثل هذه
 النظرة لا تؤدي إلى تناقض ، ولكنها فيما يبدو مفروضة علينا ، ولها مزية تمكيننا
 من تجنب تناقض آخر ينشأ من النظرة المتقابلة . فإذا كان Φ شيئاً متميزاً
 فلا بد أن يكون هناك قضية يحكم فيها Φ على نفسها ويمكن أن ندل على ذلك
 بقولنا : Φ (Φ) ، كما توجد أيضاً هذه القضية لا Φ (Φ) التي تسلب Φ (Φ) .
 وفي هذه القضية يمكن أن نعتبر Φ متغيراً فنحصل بذلك على دالة قضية . وهنا ينشأ
 هذا السؤال : أيمكن للحكم في دالة القضية هذه أن يحكم به على ذاته ؟ ذلك
 أن الحكم هو لا حكمية الذات ، فإذا أمكن أن يرجع الحكم على ذاته فلا يمكنه

ذلك ، وإذا لم يمكنه ، فيمكنه ذلك . ويتجنب هذا التناقض بالاعتراف بأن الدالة من دالة القضية ليست شيئا مستقلا . ولا كان التناقض المذكور شديدا الشبه بالتناقض الآخر الخاص بالمحمولات التي لا تُحمل على ذاتها ، فقد نرجو أن مثل هذا الحل سينطبق هناك أيضاً .

الباب الثامن

المتغير

٨٦ - لقد كشفت مناقشات الباب السابق عن الطبيعة الجوهرية للمتغير . ولا يوجد أى نظام من الأحكام يمكننا من الاستغناء عن النظر في العنصر أو العناصر المتغيرة في قضية ، على حين تظل العناصر الأخرى غير متغيرة . ولعل المتغير هو أكثر المعاني صلة واضحة بالرياضة ، كما أنه ولا شك أكثرها صعوبة على الفهم . ومحاولة هذا الفهم ، وقد يتحقق ، هى موضوع الباب الحاضر .

ويمكن إجمال النظرية الخاصة بطبيعة المتغير والنظرية المرتبة على مناقشاتنا السابقة فيما يأتى : عندما يوجد حد معين في قضية كحد لها ، فإن هذا الحد يمكن استبدال أى حد آخر به ، على حين تظل الحدود الباقية بدون تغيير . وفصل القضايا التى نحصل عليها من ذلك ، لما ما يمكن أن نسميه ثبات الصورة ؛ ويجب أن يؤخذ هذا الثبات الصورى كفكرة أصلية . إن معنى فصل القضايا ذات الصورة الثابتة أساسى أكثر من المعنى العام للفصل ، لأن هذا الأخير يمكن تعريفه بحدود الأول ، وليس العكس . فلو أخذنا أى حد ، فإن أى قضية من فصل القضايا ذات الصورة الثابتة ستشتمل على ذلك الحد . وهكذا فإن s ، وهو المتغير ، هو الذى يدل عليه « أى حد » ، ثم Φs وهو دالة القضية هو ما تدل عليه القضية من صورة Φ التى تحدث فيها s . ويمكن أن نقول إن s هو as فى أى Φs حيث يدل Φs على فصل القضايا الناتجة من قيم مختلفة لـ s . وهكذا نرى أنه بالإضافة إلى دوال القضايا فإن معانى « أى » ومعانى الدلالة مفروضة من قبل فى معنى المتغير . وإلى أسلم أن هذه النظرية

مملوءة بالصعوبات ، ولكن الاعتراضات التي تقوم ضلها أقل مما كنت أتصوره .
وسأعرضها الآن في تفصيل أكثر .

٨٧ - ولنبدأ بملاحظة أن التصريح بأي ، وبعض ، وغير ذلك لا حاجة إلى حلوله في الرياضة ، لأن الزوم الصوري سيعبر عن كل ما نحتاج إليه .
ولنرجع إلى مثال سبق مناقشته عند الحديث عن الدلالة ، حيث فصل ،
و فصل فصول . فكانت النتيجة :

« أي ا تنتمي لأي ب » تكافئ « س هي ا » ، يلزم عنها أن ي هي ب
يلزم عنها س هي ي .

« أي ا تنتمي إلى ب » تكافئ « س هي ا » يلزم عنها أن هناك حداً هو ب ،
وليكن أي من مثل س هي ي « (١) » .

« أي ا ينتمي إلى بعض ب » تكافئ « هناك حد هو ب » ، وليكن ي
من مثل س هو ا يلزم عنها س هو ي .

وهلمجراً فيما يخص بياق العلاقات التي يجنناها في الباب الخامس . وهنا
ينشأ هذا السؤال : إلى أي حد تكون هذه المكافئات تعريفات ل أي ، بعض ،
أحد (a) ، وإلى أي حد تلخل هذه المعاني في الرمزية ذاتها ؟

إن المتغير هو من وجهة النظر الصورية المعنى المميز للرياضة بوجه خاص .
وفضلاً عن ذلك فإن المنهج الخاص بتقرير نظريات عامة يدل دائماً على شيء
مختلف عن القضايا من جهة مفهوما التي يحاول بعض المنطقيين مثل «برادلي» أن
يردوها إليها . فأن يكون معنى الحكم على جميع الناس أو على أي إنسان مختلفاً
عن معنى حكم مكافئ له يدور حول تصور « الإنسان » ، فهذه حقيقة يجب
أن أعترف أنها تبدو لي بيئة بذاتها - فهي بيئة كقولنا إن القضايا التي تدور
حول زيد ليست حول اسم زيد . لذلك لن أبرهن على هذه النقطة أكثر من

(١) هنا « هناك حد هو - » حيث - هو أي فصل يعرف على أنه مكافئ لقولنا
« إذا كان د يستلزم د و » س هو - » يستلزم د لجميع قيم س ، إذن د صادق .

ذلك . وسنسلم بوجه عام أن المتغير هو الصفة المميزة للرياضة ، ولو أنه لا يرى بوجه عام حاضراً في الحساب الابتدائي . فالحساب الابتدائي كما يعلم للأطفال يتميز بهذه الحقيقة وهو أن « الأعداد » الحاصلة فيه ثوابت ، وجواب أى جمع لتلميذ مدرسة يحصل عليه بغير قضايا تتصل بأى عدد . ولكن واقع الحال هذا إنما يمكن أن يبرهن عليه بمساعدة قضايا حول أى عدد ، وبذلك ننهى من حساب التلاميذ إلى الحساب الذى يستعمل الحروف محل الأعداد ، ويبرهن على النظريات العامة . ويمكن إدراك كم يختلف هذا الموضوع عن الحساب العالى من النظر في مؤلفات أمثال « ديديكند » Dedekind ، و « شتولز » Stolz^(١) . وينحصر الفرق بكل بساطة فيما يأتى : وهو أن أعدادنا أصبحت متغيرة بعد أن كانت ثوابت . فنحن الآن نبرهن على نظريات تتعلق بـ ٣ لا بـ ٤ أو أى عدد خاص . من أجل ذلك كان من الجوهرى تماماً لأى نظرية في الرياضة أن تفهم طبيعة المتغير .

ولا شك أن المتغير كان يتصور فى الأصل ديناميكياً على أنه شيء تغير على مر الزمن ، أو كما يُقال على أنه شيء أخذ على التابع جميع القيم لفصل معين . ولا نستطيع رفض هذه النظرة سريعاً . فإذا قام البرهان على نظرية تتعلق بـ ٣ فلا ينبغى أن نفرض أن ٣ ضرب من الحبراء تكون العدد ١ يوم السبت ، والعدد ٢ يوم الأحد وهكذا . ولا ينبغى أن نفرض كذلك أن ٣ تأخذ قيمها فى وقت واحد . فلو فرضنا أن ٣ ترمز إلى أى عدد صحيح ، فلا يمكننا القول بأن ٣ هى ١ ، ولا هى ٢ ، ولا هى أى عدد معين . الواقع ٣ تدل بالضبط على أى عدد ، وهذا شيء متميز تماماً عن كل عدد وعن جميع الأعداد . وليس من الصحيح أن ١ هو أى عدد ، ولو أنه من الصحيح أن ما ينطبق على أى عدد ينطبق على العدد ١ . صفوة القول يحتاج المتغير إلى المعنى الذى لا يمكن تعريفه عن أى ، والذى شرحناه فى الباب الخامس .

(١) ما الأعداد ، وما ليس بالأعداد ؟ برنشتيك ١٨٩٣ .

٨٨ - وقد نميز ما يمكن أن نسميه المتغير الصحيح أو الصورى من المتغير المقيد . « أى حد » فهو تصور يدل على المتغير الصحيح . فإذا كان ϕ فصلا لا يشتمل على جميع الحدود فإن أى ϕ يدل على متغير مقيد . والحدود الداخلة فى الشيء الذى يدل عليه التصور المعرف تسمى قيم المتغير : وبذلك تكون كل قيمة لمتغير ϕ ثابت . وثمة صعوبة خاصة بهذه القضايا من مثل « أى عدد فهو عدد » . ولو فسرت هذه القضايا بالزوم الصورى فلا صعوبة فيها ، لأنها إنما تقرر أن دالة القضية « ϕ عدد يلزم عنه أن ϕ عدد » تصلح لجميع قيم ϕ . أما إذا أخذ « أى عدد » على أنه شيء معين فن الواضح أنه ليس مطابقاً لـ ١، ٢ أو ٣ أو أى عدد يذكر . ومع ذلك فهذه هي جميع الأعداد الموجودة بحيث لا يمكن أن يكون « أى عدد » عدداً على الإطلاق . الواقع أن التصور « أى عدد » يدل بالفعل على عدد واحد ، ولكن ليس عدداً معيناً بالذات . وهذه بالضبط هي النقطة المميزة لـ « أى » ، وأنها تدل على حد فى فصل ، ولكن طريقة توزيعه محايدة دون إثارة حد على آخر . وعلى ذلك فمع أن ϕ عدد ، ولا عدد بالذات هو ϕ ، فلا يوجد ما هنا تناقض ما دما نعرف أن ϕ ليس حداً معيناً .

ويمكن تجنب معنى المتغير المقيد ، ما عدا بالنسبة للدوال القضايا . وتجنب ذلك بعرض نظرية مناسبة ونعنى بها النظرية المعبرة عن التقييد نفسه . ولكن بالنسبة للدوال القضايا هذا غير ممكن . ذلك أن ϕ فى « ϕ » ، دالة قضية ، هو متغير غير مقيد ، ولكن الدالة ϕ مقيدة بالفصل الذى يمكن أن نسميه ϕ . (وعليتنا أن نتذكر أن الفصل هنا أساسى ، حيث أننا رأينا أنه من المستحيل بغير دور الكشف عن أى ميزة عامة يمكن بها تعريف الفصل ، ما دام تقرير أى ميزة عامة هو نفسه دالة قضية) . وعندما نجعل ϕ متغيراً غير مقيد دائماً ، فقد يمكننا أن نتكلم عن المتغير الذى يكون مطابقاً تصورياً فى المنطق والحساب والهندسة وسائر الموضوعات الأخرى الصورية .

والحدود التي تبحث هي دائماً جميع الحدود ، والتصورات المعقدة فقط إذا حدثت فإنها تميز فروع الرياضة المختلفة .

٨٩ - ونستطيع الآن أن نعود إلى بحث إمكان التعريف الظاهر لـ «أى» ، و«بعض» ، و«أحد» ، في عبارات اللزوم الصوري . وليكن أ و ب فصلين تصورين ، ثم فلننظر في هذه القضية «أى أ هو ب» . وتفسر هذه القضية بأن معناها : «س هو أ يلزم عنها س هو ب» . ولنبدأ بقولنا إنه من الواضح أن القضيتين لا يعينان نفس الشيء ، لأن أى تصور يدل فقط على الألفات ، على حين أنه في اللزوم الصوري لا يلزم أن يكون س ألفاً . ولكننا في الرياضة قد نستغنى بتاتا عن «أى أ هو ب» ونكتفى باللزوم الصوري . وهذا من الناحية الرمزية هو في الواقع أفضل سبيل . فالسؤال الذي يجب علينا أن نحصه هو : إلى أى حد ، إذا وجب ذلك أصلاً ، تدخل أى ، وبعض ، وأحد في اللزوم الصوري ؟ (أما أن أداة النكرة^(١) تظهر في «س هو أحد أ» و «س هو أحد ب» فليس لها شأن ، لأن هذه إنما أخذت كدوال قضايا نموذجية) . ولنبدأ بفصل من القضايا الصادقة كل منها يحكم على حد ثابت ، فلو كان الحد بفصل من القضايا الصادقة كل منها يحكم على حد ثابت ، بحيث إذا كان الحد أحد أ فهو أحد ب . ثم ننظر في المتغير المقيد «أى قضية من هذا الفصل» . فنحن نحكم بصدق أى حد داخل ضمن قيم هذا المتغير المقيد . ولكن للحصول على الصيغة المقترحة فن الضرورى نقل التغير من القضية ككل إلى حدها المتغير ، وبهذه الطريقة نحصل على : «س أحد أ يلزم عنها س هو ب» ولكن هذا التوالد يبق جوهرياً لأننا لسنلهمنا بصدق التعبير عن علاقة بين دالتى قضيتين «س أحد أ» و «س أحد ب» ، ولو صرح بذلك لم نكن بحاجة إلى ذكر

(١) هنا اختلاف بين اللغة الإنجليزية واللغة العربية ، ففى الإنجليزية يوجد أداة نكرة وفى العربية لا تستعمل ، وقد وضعنا بدلاً منها «أحد» فقولنا Socrates is a man نترجم كما يأتى «سقراط إنسان» وقد أشرنا إلى أمر فعل الكينونة من قبل ، أو الرابطة ، وهنا صومبة أخرى ، هى ترجمة أداة النكرة التى لا يطابقها قولنا «أحد» . (المترجم)

نفس من في المرتين . وإنما تدخل دالة قضية واحدة هي بالذات الصيغة كلها . وكل قضية من الفصل تفيد علاقة حد واحد من دالة القضية « س أحد ا » بحد واحد من « س أحد ب » . وقد نقول إذا شئنا إن الصيغة كلها تفيد علاقة أى حد من « س أحد ا » بحد ما من « س أحد ب » . ولسنا نحصل على لزوم يشتمل على متغير بمقدار ما نحصل على لزوم متغير . أو قد نقول إن س الأول هو أى حد ، ولكن الثانى هو حد ما . وبالذات س الأول . فعندنا فصل من لوازم لا تشتمل على متغيرات ، وننظر فى أى فرد من هذا الفصل . فلو كان أى فرد صادقاً ، فإننا نشير إلى هذه الحقيقة بإدخال لزوم نموذجى يشتمل على متغير . هذا اللزوم النموذجى هو ما يسمى باللزوم الصورى ، إنه أى فرد فى فصل من اللزوم المادى . وهكذا يبدو أن «أى» مفروضة من قبل فى الصورية الرياضية ، ولكن «بعض» و«أحد» قد يمكن بحق استبدالهما بما يكافئهما فى عبارات من اللزوم الصورى .

٩٠ - ولو أن «بعض» يمكن استبدالها بما يكافئها فى قولنا «أى» إلا أنه من الواضح أن هذا لا يعطينا معنى «بعض» . الواقع أن ثمة ضرباً من الثنائية بين «أى» و«بعض» . ولنفرض دالة قضية معينة ، فإذا كانت جميع الحدود المنتمية إلى دالة القضية محكوماً عليها ، فإننا نحصل على «أى» ، على حين أنه إذا كان حد واحد على الأقل هو المحكوم عليه (وهو ما يعطى ما يسمى بالنظرية الوجودية) فإننا نحصل على «بعض» . والقضية من محكوماً عليها بغير تعليق ، كما فى قولنا « س إنسان يلزم عنها أن س فان » يجب أن تؤخذ على معنى أن س صادقة لجميع قيم س (أو لأى قيمة) ولكن قد يمكن أن تؤخذ على السواء لتدل على أن Φ س صادقة لبعض قيمة س . ومن هذا الطرق يمكن أن نقيم حساباً ذا نوعين من المتغير ، المتواصل والمتفصل ، والمتغير فى هذا النوع الأخير يحدث كلما كان ثمة نظرية وجودية يراد تقريرها . ولكن لا يبدو أن فى هذه الطريقة أى مزية عملية .

٩١ - وتجب ملاحظة أن ما هو جوهرى ليس دوال القضايا المعينة ، بل فصل التصور الذى هو دالة القضية . ودالة القضية هى فصل جميع القضايا التى تنشأ من تغير حد مفرد ، ولا يجب اعتبار ما ذكرناه تعريفاً للأسباب التى شرحناها فى الباب السابق .

٩٢ - ويمكن اشتقاق جميع الفصول الأخرى من دوال القضايا وذلك بالتعريف مع استخدام معنى « مثل » . ولنفرض دالة قضية ϕ ، فإن الحدود التى نشير إليها بمثل هى الفصل المعروف بـ ϕ ، حين يكون ϕ مطابقاً لأى حد منها ، وتكون ϕ صادقة . وهذا هو الفصل ككثير ، وهو الفصل من جهة الماصدق . ولا يجب أن نفترض من هذا أن كل فصل حصلنا عليه على هذا النحو فله محمول معرف ، وستناقش هذا الموضوع من جديد فى الباب العاشر . ولكنى أظن أنه لا بد من افتراض أن الفصل من جهة الماصدق يعرف بأى دالة قضية ، وبوجه خاص أن جميع الحدود تكون فصلاً ما دامت عدة دوال قضايا (مثل جميع الوازم الصورية تصدق على جميع الحدود . وهنا كما هى الحال فى اللزوم الصورى من الضرورى أن تبقى دالة القضية بأسرها والتى يعرف صديقها الفصل سليمة ، فلا تنقسم حتى حين يكون ذلك ممكناً لكل قيمة ϕ إلى دوال قضايا متفصلة . ومثال ذلك أنه إذا كان ϕ و ψ فصلين معرفين بـ ϕ و ψ على الترتيب ، فإن جزأهما المشترك يعرف بحاصل $\phi \wedge \psi$. حيث يجب أن يستخرج الحاصل لكل قيمة ϕ ، ثم تنغير ψ بعد ذلك . فإذا لم تفعل ذلك فليس من الضرورى أن نحصل على نفس ψ فى ϕ و ψ . وهكذا فإننا لا نضرب دوال القضايا ، بل القضايا : ذلك أن الدالة الجديدة للقضية هى فصل الحواصل من القضايا المناظرة لها المتمية للدوال السابقة ، وليست بأى حال حاصل $\phi \wedge \psi$. وإنما كان الفضل للتعريف فى أن الحاصل المنطقي للفصول المعرفة بـ ϕ و ψ هو الفصل المعروف بـ $\phi \wedge \psi$. وعندما نقرر قضية مشتملة على متغير ظاهر ، فالمحكوم به لجميع

قيم المتغير أو المتغيرات هو صدق دالة القضية المناظرة للقضية كلها ، ولا يكون أبداً علاقة دوال القضايا .

٩٣ - ويظهر من المناقشة السابقة أن المتغير شيء منطقي شديد التعقيد ليس بأى حال من السهل تحليله تحليلًا صحيحًا . ويدل أن ما سأورده هو أقرب ما أستطيع أن أفعله من تحليل صحيح . ولنفرض أن قضية (لا دالة قضية) ، وليكن أحد حلولها ، ولنسم القضية Φ (١) . ثم بسبب الفكرة الأصلية لدالة القضية ، إذا كان S أى حد ، فيمكننا اعتبار القضية

(S) وهى التى تنشأ من وضع S محل Φ . ونصل بذلك إلى فصل جميع القضايا Φ (S) ، فإذا كانت كلها صادقة فلن Φ (S) يمكن الحكم بها ببساطة فقد يمكن إذن أن يسمى صدق (S) صدقًا صوريًا . ومن ناحية الزوم الصورى Φ (S) تقرر لزوما لكل قيمة لـ S ، والحكم الناشئ من Φ (S) هو حكم على فصل من اللوازم لا على لزوم واحد . وإذا كانت Φ (S) صادقة بعض الأحيان ، فإن قيم S التى تجعلها صادقة تكون فصلا هو الفصل الذى تعرفه Φ (S) : وفى هذه الحالة يقال إن الفصل موجود . أما إذا كانت Φ (S) كاذبة لجميع قيم S ، فالفصل الذى تعرفه Φ (S) يقال إنه غير موجود . والواقع كما رأينا فى الباب السادس ، لا يوجد مثل هذا الفصل إذا أخذنا الفصول من ناحية الماصدق . وهكذا نرى أن S من بعض الوجوه هو الشيء الذى يدل عليه قولنا أى حد . ومع ذلك فلا يمكن التمسك بالدقة بهذا التفسير ، لأن متغيرات مختلفة قد تقع فى قضية ومع ذلك يكون الشيء الذى يدل عليه أى حد فيما تقرّر فريدا . وهذا يكشف لنا عن نقطة جديدة فى نظرية الدلالة ، وهى أن أى حد لا يدل بمعنى الكلمة عن مجموعة من الحلول ، بل يدل على حد واحد ولكنه ليس معينا مخصوصا . وهكذا فإن أى حد قد يدل على حلول مختلفة فى مواضع مختلفة . فقد نقول : أى حد له علاقة مآ بأى حد ، فتكون هذه قضية مختلفة كل الاختلاف عن قولنا : أى حد له علاقة مآ بنفسه .

وهكذا فإن للمتغيرات ضرباً من التفرد الذى ينشأ كما حاولت أن أبين من دوال القضايا . فعندما يكون لدالة قضية متغيران ، فيجب اعتبارها قد حصلت على مراحل متتابعة . فإذا أردنا أن نحكم بدالة القضية Φ (س و ص) على جميع قيم س ، ص ، فيجب أن نعتبر الحكم فى دالة القضية (س و ص) خاصاً بجميع قيم ص ، حيث يكون ثابتاً . ولا تدخل ص فى هذا ، ويمكن تمثيلها بقولنا $\Psi(1)$. ثم نغير ١ ، ونثبت الحكم فى هذه القضية (س) بالنسبة لجميع قيم س . وهذه العملية شبيهة بالتكامل المزدوج ، ولا بد من أن نثبت صورياً أن الترتيب الذى يجرى عليه المتغيرات لا يحدث أى اختلاف فى النتيجة . وهذا فيما يظهر هو تفسير تفرد المتغيرات . فالمتغير ليس مجرد أى حد ، بل أى حد داخل فى دالة القضية . قد نقول : إذا كانت Φ س دالة قضية فإن س هى الحد فى أى قضية فى فصل القضايا التى صورتها Φ س . ومن هذا يظهر فيما يختص بدوال القضايا أن معانى الفصل ، والدلالة ، و «أى» أساسية ، من جهة أنها مفروضة من قبل فى الرمزية المستعملة . وبهذه الخاتمة أرى أننى قد أشبعت القول بقدر طاقتى فى تحليل اللزوم الصورى الذى يعد مشكلة من المشكلات الرئيسية فى الجزء الأول . ولعل بعض القراء ينجح فى تحليلها إلى انتماء ، فيجيب على الأسئلة الكثيرة التى اضطرت إلى إغفالها دون جواب .

الباب التاسع العلاقات

٩٤ - يعقب البحث في القضايا الحملية نوعان من القضايا يبلو أنهما :
يساويانها في البساطة ، وهما : القضايا التي يحكم فيها بعلاقة بين حدين ، والقضايا
التي يقال إن حديها اثنان . وهذه القضايا الأخيرة ستنظر فيها فيما بعد ، أما الأولى
فلا بد من بحثها على القور . كثيراً ما قيل إن كل قضية يمكن ردها إلى أحد
أنواع القضايا الحملية ، غير أننا سنجد خلال هذا الكتاب كثيراً من الأسباب
لرفض هذه الوجهة من النظر . ومع ذلك يمكن القول بأن جميع القضايا غير
الحملية ، والتي لا تحكم على أعداد ، يمكن ردها إلى قضايا مشتملة على حدين
وعلاقة . ومع أن رفض هذا الرأي أصعب إلا أنه أيضاً كما سنجد لا يستند إلى
أسباب وجيهة^(١) . قد نبيخ القول إذن بأن ثمة علاقات بين أكثر من حدين ،
ولكنها من حيث إنها أكثر تعقيداً فيحسن أن ننظر أولاً في تلك التي تصل بين
حدين فقط .

العلاقة بين حدين هي تصور^٢ يقع في قضية ذات حدين لا يقعان
كتصورين^(٣) ، ويعطى تبادل الحدين فيها قضية مختلفة . ونحن في حاجة إلى هذه
الملاحظة الأخيرة للتمييز بين القضية العلاقية من صنف « ا و اثنان » وبين
القضية المطابقة لها وهي « ب و ا اثنان » . والقضية العلاقية يمكن أن يرمز لها بقولنا
ا ع ب ، حيث ع هي العلاقة ، وحيث ا و ب هما الحدان . وستدل ا ع ب
دائماً على قضية مختلفة عن ب ع ا ، بشرط ألا يكون ا و ب متطابقين . وهذا

(١) انظر فيما بعد الجزء الرابع ، الباب الخامس والعشرين ، بند ٢٠٠ .

(٢) هذا الوصف كما رأينا من قبل (بند ٤٨) يستبعد العلاقة الزائفة بين الموضوع

والمحمول

يعنى أنه من خصائص العلاقة بين حدين أنها تسير ، إن صح هذا القول ، من حد إلى الآخر . وهذا هو الذى يمكن تسميته «جهة» Sense العلاقة ، وهو كما سئرى منع الترتيب والتسلسل . ويجب أن نسلم كبديهية أن $A \subset B$ تستلزم قضية علاقوية وتلزم عن قضية علاقوية هي $B \subset A$ وتسير فيها A من B إلى A ، وقد تكون هي نفس العلاقة مثل $A \subset B$ وقد لا تكون . ولكن حتى حين تستلزم $A \subset B$ $B \subset A$ وتلزم عنها ، فيجب أن يكون مفهوماً تماماً أن هاتين القضيتين مختلفتان . ويمكننا أن نميز الحد الذى تتجه العلاقة منه بأنه المتعلق به ، والحد الذى تتجه العلاقة إليه بأنه المتعلق . وجهة العلاقة معنى أساسى لا يقبل التعريف . والعلاقة التى تصل بين B ، A كلما كانت $A \subset B$ تصل بين A ، B سنسميها «عكس» E ، وندل عليها (تبعاً لشرودر Shroder) بالرمز E . وعلاقة E بـ A هي علاقة التقابل ، أو اختلاف الجهة ، ولا ينبغي تعريف هذه العلاقة (كما قد يبدو لأول وهلة صحيحاً) بالزوم المتبادل المذكور فى أى حالة فردية ، بل فقط من واقع أنها تصل فى جميع الحالات التى تقع فيها العلاقة المعطاة . وأسباب هذه الوجهة من النظر مستمدة من قضايا معينة تتعلق فيها الحدود بذاتها لا على التماثل ، أى بعلاقة ليس عكسها متطابقاً معها . فلنمض الآن فى بحث هذه القضايا .

٩٥ — هناك شيء من الإغراء يدفعنا إلى القول بأن أى حد لا يمكن أن يتعلق بنفسه ، وهناك أيضاً إغراء أقوى من ذلك للقول بأنه حتى إذا أمكن أن يتعلق الحد بنفسه ، فيجب أن تكون العلاقة متماثلة ، أى متطابقة مع عكسها . فنقول أولاً إنه إذا لم يكن هناك حد يتعلق بنفسه ، فلن نستطيع أبداً الحكم بالتطابق الذاتى ، ما دام هذا الأمر هو بكل بساطة علاقة . لكن ما دام هناك معنى كالتطابق ، وأنه لا نزاع فيما يظهر أن كل حد متطابق مع نفسه ، فيجب أن نسمح بالقول بأن الحد قد يتعلق بنفسه . ومع ذلك

فالتطابق لا يزال علاقة متباعدة ويمكن التسليم بها كذلك بغير طويل مشاحنة .
ولكننا نقع في مأزق أسوأ حين نسلم بالعلاقات غير المتباعدة للحدود مع نفسها .
وعلى الرغم من ذلك فالفضايا الآتية يظهر أنها ليست موضع نزاع : الوجود
موجود ، أو له وجود ؛ ١ هو واحد ، أوله وحدة ؛ التصور هو تصورى ؛ الحد
هو حد ؛ فصل التصور هو فصل تصور ، وجميع هذه إحدى الأنواع
الثلاثة المتكافئة التى ميزناها فى ابتداء الباب الخامس ، والتى يمكن تسميتها على
على التوالى قضايا حملية ، وقضايا تقرر علاقة الحمل ، وقضايا تقرر دخول
القرء تحت الفصل . فالذى علينا أن نبحث فيه هو الواقع من أن المحمول
قد يحمل على نفسه . ومن الضروري لتوضيح غرضنا الراهن أن نأخذ قضايانا
من الصورة الثانية (سقراط له إنسانية) ما دامت الصورة الحملية ليست على
المعنى المذكور سابقاً علاقة . ويمكن أن نأخذ كنموذج لمثل هذه القضايا
« الوحدة لها وحدة » . وهنا لا نزاع فى أننا لا ننكر أن علاقة الحمل غير متباعدة
ما دامت الموضوعات لا يمكن بوجه عام أن تحمل على محمولاتها . وهكذا فإن
« الوحدة لها وحدة » تقرر علاقة واحدة بين الوحدة ونفسها ، وتستلزم علاقة
أخرى ، وهى عكس العلاقة : فالوحدة لها بالنسبة لنفسها كلا من العلاقة
الموضوع بالمحمول ، وعلاقة المحمول بالموضوع . والآن إذا كان المتعلق به والمتعلق
متطابقين ، فمن الواضح أن المتعلق له بالمتعلق به نفس العلاقة كذلك التى بين
المتعلق به والمتعلق . ومن ثم إذا عُرِّفَت عكس العلاقة فى حالة خاصة باللزوم
المبادل فى تلك الحالة الخاصة ، فقد يظهر فى الحالة الراهنة أن علاقتنا لها
عكسان ما دامت هناك علاقتان مختلفتان تلزم عن المتعلق والمتعلق به فى هذه
القضية : « الوحدة لها وحدة » . يجب إذن أن نعرف عكس العلاقة بالواقع من
أن $a \in b$ تستلزم وتلزم عن $b \in a$ ، مهما يكن a و b ، إذا كانت علاقة
 \in تصل بينهما أو لا . ومعنى ذلك أن $a \in b$ هما هنا متغيران جوهريان ، وإذا
أعطيناها أى قيمة ثابتة ، فقد نجد أن $a \in b$ تستلزم وتلزم عن $b \in a$ ،

حيث أن ع⁻ هي علاقة مّا مختلفة عن ع .

من أجل ذلك لا بد من ملاحظة نقط ثلاث فيما يخص بالعلاقات بين الحدين : (١) أنها كلها لها جهة بحيث يمكننا التمييز بين ا ع ب ، وبين ب ع ا بشرط ألا يكون ا و ب متطابقين ؛ (٢) أنها كلها لها عكس ، أى علاقة ع بحيث تكون ا ع ب تستلزم وتلزم عن ب ع ا⁻ ، مهما يكن ا و ب ؛ (٣) بعض العلاقات تصل بين الحد نفسه ، وليس من الضروري أن تكون مثل هذه العلاقات مّاثلة ، أى قد تكون هناك علاقتان مختلفتان كل منهما عكس الأخرى ، ويصل كل منهما بين الحد ونفسه .

٩٦ - فيما يخص بالنظرية العامة للعلاقات وبخاصة في تطوراتها الرياضية ، هناك بعض البديهيات التي تربط بين الفصول والعلاقات على أهمية كبيرة .
ليكن معلوماً أن اتصال علاقة معينة بحد معين فهذا الاتصال بالحد هو محمول .
ولذلك فتكون جميع الحدود التي لها هذه العلاقة بهذا الحد فصلا . وليكن معلوما كذلك أن مجرد وجود علاقة فهو محمول ، ولذلك تكون جميع المتعلقات بها بالنسبة لعلاقة معينة فصلا ، ويترتب على ذلك من اعتبار عكس العلاقة أن جميع المتعلقات أيضا تكون فصلا . وسأسمى هذين الفصلين على التوالي ميدان وعكس ميدان العلاقة : وسأسمى المجموع المنطقي لل اثنين مجال العلاقة .

ومع ذلك يبدو أن البديهية التي تقول بأن جميع المتعلقات بها بالإضافة إلى علاقة معينة تكون فصلا ، تحتاج إلى بعض التحديد ، وذلك على أساس التناقض المذكور في ختام الباب السادس . ويمكن تقرير هذا التناقض كما يأتي : فقد رأينا أننا بعض المحمولات يمكن حملها على ذاتها . فلتنظر الآن في التي لا تكون هذه حالتها . وهذه هي المتعلقات بها (وأيضاً المتعلقات) التي تشبه علاقة معقدة ، وهي الجمع بين الاحتمالية وبين التطابق . لكن ليس هناك محمول يتصل بها كلها ولا يتصل بأى حدود أخرى . لأن هذا المحمول سيكون إما محمولا على نفسه أو ليس كذلك . فإن كان محمولا على نفسه

فهو أحد تلك المتعلقة بها التي عرفت بالعلاقة ، فهو إذن ، بحكم تعريفها ، لا يقبل الحمل على نفسه . وبالعكس لم يقبل الحمل على نفسه ، فهو عندئذ أيضاً أحد المتعلقة بها المذكورة التي (فرضاً) يقبل جميعها الحمل ، فهو إذن يقبل الحمل على نفسه . وهذا تناقض يتبين منه أن جميع المتعلقة بها المذكورة ليس لها محمول مشترك مانع ، ولا تكون بناءً على ذلك فصلاً ، إذا كانت المحمولات المعرفة ضرورية للفصول .

ويمكن أن نضع الأمر على نحو آخر . فعند تعريف الفصل المزعوم للمحمولات استنفدت جميع المحمولات التي تقبل الحمل على نفسها . ولا يمكن أن يكون المحمول المشترك بين جميع هذه المحمولات واحداً منها ، ما دام لكل منها يوجد على الأقل محمول واحد (وهو نفسه) لا يقبل الحمل . ولكننا نعود فنقول إن المحمول المشترك المفروض لا يمكن أن يكون أى محمول آخر ، إذ لو كان كذلك لقبّل الحمل على نفسه ، ومعنى ذلك أنه يكون أحد أفراد فصل المحمولات المفروض ، ما دامت هذه المحمولات قد عرفت بأنها تلك التي تقبل الحمل . وهكذا لم يترك محمول يعم في اتصاله جميع المحمولات المذكورة .

ويترب على المناقشة السابقة أنه ليس كل مجموعة يمكن تعريفها من الحدود تكون فصلاً يعرفه محمول مشترك . وينبغي أن نجعل هذه الحقيقة في بالنا ، وأن نحاول الكشف عن الخواص التي يجب أن تكون للمجموعة حتى تكون مثل هذا الفصل . ويمكن بيان النقطة المقررة في التناقض المذكور كما يأتي : القضية التي إنما تشتمل في الظاهر على متغير واحد قد لا تكون مكافئة لأي قضية يكون الحكم فيها بأن المتغير المذكور له محمول معين . ويبقى السؤال بعد ذلك موضع بحث هل يجب على كل فصل أن يكون له محمول معرف .

أما أن تكون جميع الحدود التي لها علاقة معينة بمحد معين فصلاً معرفاً

بمحمول مشترك مانع فهذا نتيجة المذهب الذى بسطناه فى الباب السابع ، وبيننا فيه أن القضية $a \text{ ع } b$ يمكن تحليلها إلى الموضوع a وإلى الحكم $ع \text{ ب}$. فإن يكون الحد $ع \text{ ب}$ مما يمكن الحكم به فيظهر ببساطة أنه محمول . ولكن لا يترتب على ذلك فيما أظن أن يكون الحد $ع$ ، لبعض قيمة $ص$ ، مما يمكن الحكم به ، ومع ذلك فإن مذهب دوال القضايا يتطلب أن تكون جميع الحدود التى لها الخاصة الأخيرة فصلا . وسأسمى هذا الفصل ميدان العلاقة $ع$ وكذلك فصل المتعلقات بها . وسسمى أيضا ميدان عكس العلاقة عكس الميدان ، وكذلك فصل المتعلقات . وسسمى مجموع الميدانين مجال العلاقة — وهى فكرة ذات أهمية خاصة بالنسبة للتسلسل . وهكذا إذا كانت الأبوة هى العلاقة ، فالآباء يكونون ميدانها ، والآباء عكس ميدانها ، والآباء والآباء معاً مجالها .

وقد يشك فيما إذا كانت القضية $a \text{ ع } b$ يمكن أن يُعتبر فيها $a \text{ ع } b$ محكوماً عليه من $ب$ ، أو الذى يحكم على $ب$ هو فقط $ع \text{ ا}$. وبعبارة أخرى هل القضية العلاقية إنما هى حكم متصل بالمتعلق به ، أو أنها أيضا حكم متصل بالمتعلق ؟ ولو أخذنا الوجهة الأخيرة من النظر فسنحصل من هذه القضية مثلاً « أكبر من $ب$ » على أربعة أحكام، هى : « أكبر من $ب$ » و « أكبر من $ا$ » و « أصغر من $ا$ » و « أصغر من $ب$ » . وأنا شخصياً أميل إلى الأخذ بهذه النظرة ، ولكنى لا أعرف ما هى حجج كلا الجانبين .

٩٧ — ويمكن أن نكوّن المجموع والحاصل المنطقى لعلاقتين أو لفصل من العلاقات تماماً كما نفعل فى حالة الفصول ، فيما عدا أننا هنا بصدد تغير مزدوج . وبالإضافة إلى هذه الطرق من الجمع فنعدنا أيضاً حاصل الضرب النسبي ، والذى على العموم لا يقبل التعويض فيحتاج بناءً على ذلك إلى أن يكون عدد العوامل محدوداً . فلو كانت $ع$ ، $ح$ علاقتين ، فالقول بأن حاصل ضربهما النسبي $ع \text{ ح}$ يصل بين حدين هما $س$ ، $هـ$ يعنى القول بأن هناك حداً هو $ص$ له مع $س$ العلاقة $ع$ ، وله نفسه العلاقة $ح$ مع $هـ$. مثال ذلك

العديل هو حاصل الضرب النسبي من الزوجة والأخ أو الأخت والزوج .
والصهر هو حاصل الضرب النسبي من الزوجة والأب ، على حين أن الحاصل
النسبي من الأب والزوجة هو الأم أو زوجة الأب .

٩٨ — وهناك ما يغرى باعتبار العلاقة المعروفة بالمصدق أنها فصل من
الروابط Couples . ولهذا الأمر مزية صورية هي تجنب الضرورة التي تخضع
لها القضية الأولية حين تقرر بأن كل رابطة فلها علاقة لا تصل بين
زوج آخر من الحدود . ولكن من الضروري أن نعطي للرابطة جهة
حتى نميز بين المتعلق به والمتعلق : وهكذا تصبح الرابطة متميزة جوهريا من
الفصل المكون من حدين ، ويجب قبولها كفكرة أولية . وقد يبدو حين ننظر
للأمر فلسفيا أن الجهة لا يمكن أن تشتق إلا من قضية علاقة مآ ، وأن الحكم
بأن a متعلق به و b متعلق يقتضى من قبل قضية علاقة بمجة فيها a ، ب
حدا ، على الرغم من أن العلاقة المحكوم بها إنما هي العلاقة العامة بين المتعلق
به والمتعلق . الواقع توجد تصورات مثل «أكبر» التي تحصل لا كحد في القضايا
ذات الحدين (بند ٤٨ ، ٥٤) ، ولا يمكن لأى مذهب خاص بالروابط
تجنب مثل هذه القضايا . يبدو إذن من الأصوب اتخاذ وجهة نظر المفهوم
عند بحث العلاقات ، وأن يكون الأوّل مطابقتها بفصول التصورات لا بالفصول .
وهذا الإجراء يريحنا أكثر من الناحية الصورية ، ويبدو أنه أقرب إلى الحقائق
المنطقية . وتشمل الرياضة نفس العلاقة الغريبة بنظريتها المفهومية والمصادقية :
فالرموز لا الحدود المتغيرة (أى فصل التصورات المتغيرة والعلاقات) تحل محل
المفاهيم ، على حين أن الأشياء الفعلية التي نبحث فيها هي دائما المصادقات .
وهكذا فإنّه في حساب العلاقات فصول الروابط هي التي تهتمنا ، ولكن الرموز
تبحث فيها بطريق العلاقات . وهذا بالضبط شبيه بالأحوال التي شرحناها
بخصوص الفصول ، وليس من الضروري فيها يظهر تكرار الشرح في إطناب .
٩٩ — وقد أقام برادلى في الفصل الثالث من كتابه « الظاهر والحقيقة »

حجة ضد حقيقة العلاقات مستندا إلى التراجع اللانهائي الناشئ من أن العلاقة التي تصل بين حدين يجب أن تتعلق بكل منهما . والتراجع اللانهائي لا نزاع فيه إذا أخذنا القضايا العلاقية على أنها نهائية ، ولكن مما يشك فيه كثيراً أنها تخلق أى صعوبة منطقية . وقد سبق لنا (بند ٥٥) أن ميزنا بين نوعين من التراجع ، الأول يتجه فقط نحو قضايا لزومية جديدة على الدوام ، والثاني تراجع فى معنى القضية نفسها . واتفقنا على أن الأول من هذين النوعين لم يعد عليه اعتراض منذ حل مشكلة اللانهائية ، على حين أن النوع الثانى لا يزال غير مقبول .

وعلىنا الآن أن نبحث أى هذين النوعين من التراجع يحصل فى المثال الحاضر . وقد نزع أن العلاقة موضع البحث من حيث إنها جزء من نفس معنى القضية العلاقية فيجب أن يكون لها بالحددين المعبر عنها بقولنا إنها تربطهما ، وهذا هو الذى يحقق التمييز الذى سبق أن تركناه بغير تفسير (بند ٥٤) بين علاقة تتعلق وعلاقة فى ذاتها . ومع ذلك فقد نزع فى الاحتجاج ضد هذه النظرة أن الحكم بعلاقة بين العلاقة والحددين ليس جزءاً من القضية الأصلية ولو أن ذلك يلزم عنها ، وأن العلاقة التى تتعلق تتميز عن العلاقة فى ذاتها بعنصر الحكم غير القابل للتعريف الذى يميز بين القضية وبين التصور . وقد يقال فى الرد على ذلك أن فى هذا التصور « الفرق بين ا ، ب » الفرق يعلق ا ب ، كما لو كنا نقول فى القضية « ا و ب يختلفان » . ولكن قد نرجع فنضيف إلى ذلك أننا قد وجدنا الفرق بين ا ، ب غير متميز عن مجرد الفرق ، ما عدا إذا كان ثمة نقطة معينة للفرق . وهكذا يبدو مستحيلاً إثبات أن التراجع اللانهائى المذكور من النوع المعارض عليه . وأظن أننا يمكن التمييز بين « ا تفوق ب » وبين « ا (هو) أكبر من ب » ^(١) ولو أنه من المحال إنكار أن الناس تعنى عادة نفس الشئ من هاتين القضيتين . وعلى الأساس الذى

(١) فى الأصل « a is greater than b » ، وقد جرينا على ترجمتها « ا أكبر من ب » ولكن المؤلف سيمتدح فيما بعد ان *than, is* حذان ، فاقضت الترجمة ترجمة الرابطة هو (المترجم)

لا مهرب لنا منه من أن كل لفظ أصلي يجب أن يكون له معنى ما، فإن «هو» و«من» يجب أن يكونا جزءاً من قولنا «ا (هو) أكبر من ب» فنشتمل بذلك على أكثر من حدين وعلاقة. ويبدو أن «هو» تقرر أن ا له مع «أكبر» العلاقة بالمتعلق به، على حين أن «من» تقرر بالتشابه أن ب له مع أكبر العلاقة بالمتعلق. ولكن «ا تفوق ب» قد يقال إنها تعبر فقط عن العلاقة بين ا، ب دون أن تشتمل على أى لزوم آخر من العلاقات. من أجل ذلك لا بد لنا من أن نختم البحث بقولنا إن القضية العلاقية ا ع ب لا تشتمل فى معناها على أى علاقة بين ا أو ب وبين ع، وأن التراجع اللانهائى ولو أنه لا نزاع فيه إلا أنه لا ضرر منه منطقياً. وبهذه الملاحظات يمكن أن نرجى الكلام عن بقية نظرية العلاقات إلى الأجزاء المقبلة من هذا الكتاب.

الباب العاشر

التناقض

١٠٠ - من الضروري قبل أن نفرض أيدينا من المسائل الأساسية أن نفحص أكثر تفصيلاً عن التناقض الغريب ، والذي ذكرناه من قبل ، بالنسبة للمحمولات التي لا تقبل الحمل على ذاتها . ويحسن قبل محاولة حل هذا اللغز أن نستنتج بعض الاستبطات المتصلة ، وأن نقررها في أشكال مختلفة . وأذكر بهذه المناسبة أن الذي قادني إليها محاولة التوفيق بين برهان «كانتور» من عدم إمكان وجود أكبر عد أصلي ، وبين الفرض المقبول من أن فصل جميع الحدود (الذي رأينا أنه جوهرى لجميع القضايا الصورية) له بالضرورة أكبر عدد ممكن من الأفراد^(١) .

ليكن ه فصل التصور الذي يمكن أن يحكم به على نفسه ، مثل « ه هو ه » ، والحالات هي فصل التصور ، وسلوب فصول التصورات العادية مثل لا إنسان (ا) فإذا كان ه داخلا تحت فصل آخر هو ي ، فإنه ما دام ه هو ه ، فإن ه هو ي ، ويترتب على ذلك أن هناك حداً من حدود ي هو فصل تصور يمكن أن يحكم به على نفسه . ثم بنقل الوضع (ب) إذا كان ل فصل تصور ليس أفراده فصول تصورات يمكن أن يحكم بها على نفسها ، فلا فصل تصور داخلا تحت ل يمكن أن يحكم به على نفسه . ثم بعد ذلك (ح) إذا كان ل أى فصل تصور كان ، و ل فصل التصور لأفراد ل التي لا تقبل الحمل على نفسها ، ففصل التصور هذا مشتمل على نفسه ، ولا أحد من أفراده يقبل الحمل على نفسه . ويترتب على ذلك من (ب) أن ل لا يقبل الحمل على

(١) انظر الجزء الخامس ، الباب الثالث والأربعين ، بند ٣٤٤ وما بعدها .

نفسه . وبناء على ذلك لـ ليس أحد لـ ، فليس إذن أحد لـ ؛ لأن حدود لـ التي ليست حدود لـ هي كلها مما تقبل الحمل على نفسها ، أما لـ فلا . ويترتب على ذلك (د) أنه إذا كان لـ أى فصل تصور كان فهناك فصل تصور داخل تحت لـ وليس فرداً منه ، وهو أيضاً أحد فصول التصورات التي تقبل الحمل على نفسها . وإلى هنا يبدو أن استنباطاتنا ليست موضع سؤال . ولكن لنأخذ الآن آخر استنباط منها ، ولنسلم بالفصل من تلك الفصول من التصورات التي لا يمكن أن يحكم بها على نفسها ، فسنجد أن هذا الفصل لا بد أن يشتمل على فصل تصور ليس حداً لنفسه ومع ذلك لا يدخل تحت الفصل المذكور .

وقد نلاحظ أيضاً أنه بفضل ما أثبتناه في (ب) فإن فصل فصول التصورات التي لا يمكن أن يحكم بها على نفسها ، والتي سنسميها هـ ، يشتمل كحدود داخلية تحتها جميع فصولها الفرعية ، ولو أنه من السهل إثبات أن كل فصل له من الفصول الفرعية أكثر مما له من الحدود . ثم إذا كان صـ أى حد من حدود هـ ، وكان هـ هو جميع هـ ما عدا صـ ، إذن هـ باعتباره فصلاً فرعياً من الفصل هـ ، ليس أحد هـ بل أحد هـ ، إذن هو صـ . وبناء على ذلك فكل فصل تصور هو أحد حدود هـ فله سائر حدود هـ كما صدقته ، ويترتب على ذلك أن التصور «دراجة» هو «ملقعة» ، و «الملقعة» هي «الدراجة» . ومن الواضح أن هذا محال ، ويمكن إثبات أى عدد من هذه الحالات المماثلة .

١٠١ — فلنترك هذه النتائج المتناقضة ، ولنحاول وضع التناقض نفسه في عبارة مضبوطة . وقد سبق وضع هذه العبارة بدلالة المحمولات . فلو كان صـ محمولاً ، فإن صـ قد يقبل الحمل على نفسه وقد لا يقبل . ولنسلم بأن «ما لا يقبل الحمل على نفسه» هو محمول . ويترتب على ذلك أن الفرض بأن هذا المحمول إما أن يقبل الحمل على نفسه أو لا يقبل فهو خلف . والنتيجة في هذه الحالة تلبو واضحة وهي : «لا يقبل الحمل على نفسه» ليس محمولاً .

ولنبسط الآن التناقض نفسه في صيغة فصول التصورات . إن فصل التصور قد يكون وقد لا يكون أحد حدود ما صدقاته . إن قولنا : « فصل تصور ليس أحد حدود ما صدقاته » يظهر أنه فصل تصور . ولكن إذا كان أحد حدود ما صدقاته ، فهو فصل تصور ليس حداً من حدود ما صدقاته ، والعكس بالعكس . وهكذا يجب أن نستنتج خلافاً للظواهر أن « فصل التصور الذي ليس أحد حدود ما صدقاته » ليس فصل تصور .

وبالنظر إلى حدود الفصول يبدو التناقض أكثر عجباً . فالفصل كواحد قد يكون حداً لنفسه ككثير . وهكذا فإن فصل جميع الفصول فصل ؛ وفصل جميع الحدود التي ليست ناساً ، ليس إنساناً ، وهكذا . هل جميع الفصول التي لها هذه الخاصة تكون فصلاً ؟ إذا كان الأمر كذلك ، فهل هو كفصل هو حد لنفسه ككثير أو لا ؟ فإذا كان كذلك ، فهو واحد من الفصول التي كواحدات ليست حدوداً لنفسها ككثير ، والعكس بالعكس . وهكذا يجب أن نستنتج مرة أخرى أن الفصول التي هي كواحدات ليست حدوداً لأنفسها ككثير لا تكون فصلاً – أو فلنقل إنها لا تكون فصلاً كواحد ، لأن الحجة لا يمكن أن تبين أنها لا تكون فصلاً ككثير .

١٠٢ – ويمكن إثبات نتيجة شبيهة بذلك خاصة بأي علاقة ، دون أن تؤدي مع ذلك إلى تناقض . ولتكن ع علاقة ، ولنعبر الفصل ه مشتملاً على الحدود التي ليس لها علاقة ع بنفسها ، فيكون من المستحيل وجود أى حد هو ا ولها جميعاً دون غيرها علاقة ع . إذ لو كان هناك مثل هذا الحد ، فإن دالة القضية « س ليس له العلاقة ع مع س » تكون مكافئة لقولنا : « س له العلاقة ع مع ا » . فإذا وضعنا ا محل س في جميع الأحوال ، وهذا شيء مشروع ما دام التكافؤ صورياً ، لوجدنا تناقضاً . وحين نضع محل ع الرمز ^٤ ، وهو علاقة الحد بفصل التصور الذي يمكن أن يحكم به عليه ، فلأننا نحصل على التناقض المذكور . والسبب في ظهور التناقض هنا هو أننا أخذنا كبديهية أن

أى دالة قضية تشتمل على حد واحد فقط فهي مكافئة للحكم بالدخول تحت الفصل المعرف بدالة القضية . ومن الواضح فساد كلا من هذه البديهية أو المبدأ القائل بأن كل فصل يمكن أن يؤخذ كحد واحد ، ولا يوجد اعتراض جوهرى على رفض أى واحد منهما . ولكننا إذا رفضنا البديهية نشأ هذا السؤال : أى دوال القضايا تعرف الفصول ذات الحد الواحد كما تعرف ذات الحدود الكثيرة ، وأياها لا يعرف ؟ وبهذا السؤال تبدأ صعوباتنا الحقيقية .

إن أى طريقة نحاول بها إثبات تعالق Correlation واحد بواحد أو كثير بواحد لجميع الحدود أو جميع دوال القضايا فيجب أن تغفل على الأقل دالة قضية . ومثل هذه الطريقة يمكن أن توجد إذا كانت جميع دوال القضايا يمكن التعبير عنها فى صورة . . . ل ، ما دامت هذه الصورة تعالقي بين ل وبين . . . ل . ولكن استحالة مثل هذا التعالقي يثبت كما يأتى ؛ ليكن Φ من دالة قضية تتعالق مع Φ ، فإذا كان التعالقي يشمل جميع الحدود ، فإن إنكار Φ (س) سيكون دالة قضية ، ما دامت أنها قضية لجميع قيم س . ولكنها لا يمكن أن يشتمل التعالقي عليها ، لأنها إذا كانت متعاقلة مع Φ ، كانت Φ (س) مكافئة ، لجميع قيم س ، مع رفض Φ (س) . ولكن هذا التكافؤ مستحيل لقيمة Φ (س) مكافئة لرفضها نفسها . وينشأ عن ذلك أن هناك دوال قضايا أكثر من الحدود — وهى نتيجة يظهر أنها مستحيلة ، ولو أن البرهان مقنع كأى برهان آخر فى الرياضة . وسوف نرى بعد قليل كيف ترفع هذه الاستحالة بمذهب الأصناف المنطقية .

١٠٣ — وأول طريقة تفرض نفسها هى البحث عن إيهام فى معنى Φ . ولكننا فى الباب السادس قد ميزنا المعانى المتعددة إلى أقصى ما يمكن من التمييز ورأينا أن نفس التناقض يظهر مع كل معنى . ومع ذلك فلنحاول التعبير عن التناقض فى صيغة دوال القضايا . لقد افترضنا أن كل دالة قضية ليست صفرا تُعرّف فصلا ، وكل فصل يمكن بالتأكيد أن يُعرّف بدالة قضية . فقولنا بأن

فصلا كواحد ليس حداً لنفسه ككثير هو القول بأن الفصل كواحد يحقق الدالة التي عرف بها ككثير . وما دامت جميع دوال القضايا ما عدا الصفر منها تعرف فصولاً ، فسوف تُستنفد كلها مع اعتبار جميع الفصول التي لها الخاصة المذكورة ، ما عدا التي ليس لها تلك الخاصة المذكورة . ولو كانت أى دالة قضية محققة من كل فصل له الخاصة المذكورة ، لكانت بالضرورة محققة أيضاً من الفصل هـ ، وهو كل الفصول المعتبرة كحد واحد . وبناءً على ذلك فإن فصل هـ لا ينتمى بذاته إلى الفصل هـ ، ومن ثمَّ يجب أن يكون هناك دالة قضية تحققها حدود هـ ولا يحققها هـ ذاته . وهكذا يرجع التناقض إلى الظهور ، وعلينا أن نفترض إما عدم وجود شيء مثل هـ ، أو أنه ليس هناك دالة قضية تحققها جميع حدوده دون غيرها .

وقد يُظن أنه يمكن إيجاد حل بإنكار مشروعية دوال القضايا المتغيرة . فلو دللنا مؤقتاً بالرمز ϕ لفصل القيم المحققة Φ ، كانت دالة قضيتنا هي رفض (ϕ) ، حيث ϕ هي المتغير . إن المذهب الذي بسطناه في الباب السابع من أن ϕ ليس شيئاً منفصلاً قد يجعل مثل هذا المتغير يبدو غير مشروع . ولكن هذا الاعتراض يمكن التغلب عليه بأن نحل محل ϕ فصل القضايا ϕ أو العلاقة بين ϕ و ψ و χ . وفضلاً عن ذلك فن المستحيل استبعاد دوال القضايا المتغيرة بتاتا . فحيث يحصل فصل متغير ، أو علاقة متغيرة فقد سلمنا بدالة قضية متغيرة هي بذلك جوهرية للأحكام عن كل فصل أو كل علاقة . فتعريف ميدان العلاقة مثلاً وجميع القضايا العامة التي تكون حساب العلاقات مقضى عليه برفضنا السماح بهذا الضرب من التغير . وهكذا فنحن في حاجة إلى بعض الخصائص الأخرى التي بها نميز بين نوعين من التغير . وأحسب أننا قد نجد هذه الخصيصة في التغير المستقل للدالة والموضوع . وبوجه عام فإن ϕ و ψ هي ذاتها دالة متغيرين هما ϕ ، ψ . ومن هذين المتغيرين إما أن نعطي أحدهما قيمة ثابتة ، وإما أن نغيرهما دون أن يرجع أحدهما إلى الآخر .

ولكن في نموذج دوال القضايا، التي نبحثها في هذا الباب ، الموضوع هو نفسه دالة لدالة القضية : فبدلاً من Φ من نضع $\{ \Phi \}$ ، حيث (Φ) تعرف كدالة Φ . وهكذا حين تغير Φ ، فإن الموضوع الذي يحكم فيه على Φ يتغير أيضاً . وهكذا فإن « Φ هو أحد Φ » تكافئ « Φ يمكن أن يحكم به على فصل الحدود التي تحقق Φ » حالة كون هذا الفصل من الحدود هو Φ . فلو تغير هنا Φ ، فإن الموضوع يتغير في الوقت نفسه بشكل يتوقف على تغير Φ . ولهذا السبب فإن $\{ \Phi \}$ و (Φ) « ولو أنها قضية محدودة حين يُعين Φ » ، إلا أنها ليست دالة قضية بالمعنى العادي حين يكون Φ متغيراً . ويمكن تسمية دوال القضايا التي من هذا الصنف المشكوك فيه باسم الصور التريبية لأن المتغير يدخل بطريقة شبيهة ببعض الشيء بما يحدث في الجبر من ظهور المتغير في معادلة من الدرجة الثانية .

١٠٤ - ولعل أفضل طريقة لبيان الحل المقترح هو أن نقول إنه إذا كانت مجموعة من الحدود إنما يمكن أن تعرف بدالة قضية متغيرة فإن الفصل كواحد يجب أن يرفض ، ولو أن الفصل ككثير قد يقبل . وحين يقرر بهذا الشكل يظهر أن دوال القضايا يمكن أن تغير بشرط ألا تدخل أبداً المجموعة المستنبطة في الموضوع في دالة القضية الأصلية . وفي مثل هذه الأحوال لا يوجد إلا فصل ككثير لا فصل كواحد . وقد اعتبرنا الأمر كبدئية أن الفصل كواحد يوجد حيناً وجد فصل ككثير . ولكن هذه البدئية لا يجب قبولها قبولاً عاماً ، ويبدو أنها منبع التناقض . فإذا رفضناها انحلت الصعوبة كلها .

سنقول إذن إن الفصل كواحد هو شيء من الصنف نفسه كحدوده ، ونعني بذلك أن أى دالة قضية Φ (Φ تكون ذات معنى حين نستبدل أحد الحدود بـ Φ تكون كذلك ذات معنى حين نستبدل الفصل كواحد . ولكن الفصل كواحد لا يوجد دائماً ، والفصل ككثير من صنف مختلف عن حدود الفصل ، حتى حين إنما يكون للفصل حدٌ واحد ، مثال ذلك هناك دوال قضايا (Φ) (ل)

فيها ل قد يكون الفصل ككثير ، وهذه الدوال تخلو من المعنى إذا استبدلنا
ب ل أحد حدود الفصل . وهكذا فإن « س واحد من السينات » لا تكون قضية
على الإطلاق إذا كانت العلاقة الداخلة هي علاقة حد بفصله ككثير . وهذه
هي العلاقة الوحيدة التي إن وجدت فإن دالة القضية تكون مصدر اطمئنان لنا
على الدوام . وطبقا لهذه النظرة قد يكون الفصل ككثير موضوعاً منطقياً ، ولكن
في قضايا من نوع مختلف عن تلك التي تكون فيها حدوده موضوعات . وإذا كان
الشيء أكثر من حد مفرد ، فإن سؤالنا هل الشيء واحد أو كثير ، سيكون له
أجوبة مختلفة بحسب القضية التي يقع فيها . مثل ذلك « سقراط واحد من
الناس » نجد فيها أن الناس جمع . أما « الناس أحد أنواع الحيوان » فالناس
فيها مفرد . فالتمييز بين الأصناف المنطقية هو مفتاح السر كله ^(١) .

١٠٥ -- وطرق أخرى قد تقترح للتخلص من التناقض تبدو غير مرغوب
فيها على أساس أنها تفسد الكثير من أنواع القضايا الضرورية جدا . وقد يقترح
أن التطابق داخل في قولنا « س ليست أحد من » بطريقة غير مقبولة . ولكننا
قد بينا من قبل أن علاقات الحدود بأنفسها مما لا يمكن تجنبه ، ولعلنا نلاحظ
أن المستحزين أو العصامين أو أبطال سميلز Smiles « ساعد نفسك » ^(٢)
كلهم معروفون بعلاقات مع أنفسهم . وعلى العموم فإن التطابق يدخل بطريقة
شبيهة جدا في الزوم الصوري بحيث يكون من المستحيل استبعاده .

واقترح طبيعي للهرب من التناقض هو الاعتراض على فكرة جميع الحدود
أو جميع الفصول . وقد يقال إن مثل هذا الحاصل لا يمكن تصوره . وإذا
كانت « كل » تشير إلى المجموع فهربنا من التناقض يحتاج منا إلى التسليم بهذا .
غير أننا قد رأينا فيما سلف كثيراً أنه إذا تمسكنا بهذه النظرة ضد أى حد ،
لاستحالت كل حقيقة صورية ، ولألغيت الرياضة التي صفتها هي تقرير
الحقائق الخاصة بأى حد بضربة قلم . وهكذا فإن التقرير الصحيح للحقائق

(١) انظر في هذا الموضوع الملحق .

(٢) صويل سميلز (١٨١٢ - ١٩٠٤) كاتب اسكتلندي مشهور ، وأشهر مؤلفاته

« ساعد نفسك » Help yourself . [المترجم] .

الصورية يحتاج إلى فكرة «أى حد» أو «كل حد» ، ولكنه لا يحتاج إلى الفكرة الجمعية عن «جميع» الحدود .

وأخيراً يجب ملاحظة أنه لا توجد فلسفة خاصة داخلية في التناقض المذكور الذى ينبع مباشرة من نظر العقل السليم ، ولا يمكن حله إلا بإغفال بعض مسلمات العقل السليم . والفلسفة الهيكلية وحدها ، تلك التى تعيش على التناقضات ، يمكن أن تظل بغير اكتراث لأنها تجد مشكلات مشابهة فى كل مكان . أما فى أى مذهب آخر فإن مثل هذا التحدى المباشر يتطلب جواباً خشية الاعتراف بالعجز . ومن حسن الحظ أنه لا توجد بمقدار ما أعرف أى صعوبة مماثلة فى أى جزء آخر من هذا الكتاب «أصول الرياضيات» .

١٠٦ — ولعلنا الآن نستعرض فى إيجاز النتائج التى وصلنا إليها فى الجزء الأول . فقد عرفنا الرياضة بأنها فصل القضايا التى تقرر لوازم صورية ولا تشتمل على ثوابت ما عدا الثوابت المنطقية ، وهى : الزوم ، وعلاقة الحد بالفصل الذى هى أحد حدوده ، ومعنى «مثل» ، ومعنى العلاقة ، وغير ذلك من المعانى الأخرى الداخلة فى الزوم الصورى ، والتى رأينا (بند ٩٣) أنها ما يأتى : دالة القضية ، الفصل^(١) ، الدالة ، وه «أى» أو «كل» حد . وقد رفع هذا التعريف الرياضة إلى مرتبة قريبة جداً من المنطق ، وجعلتها عملياً متطابقة مع المنطق الرمضى . ويؤدى النظر فى المنطق الرمضى إلى تبرير التعداد المذكور للمعارف الرياضية . وقد ميزنا فى الباب الثالث بين الزوم وبين الزوم الصورى ، فالزوم يصل بين أى قضيتين بشرط أن تكون الأولى كاذبة أو الثانية صادقة . أما الزوم الصورى فليس علاقة بل حكماً ، لكل قيمة للمتغير أو المتغيرات لدالة قضية تقرر لزوماً لكل قيمة للمتغير أو المتغيرات . وفى الباب الرابع ميزنا بين ما سميناه الأشياء من المحمولات والعلاقات (ويشتمل ذلك على «هو» الخاصة بالحمل مع غيرها من العلاقات فى هذا الغرض) . وقد بينا أن هذا التمييز مرتبط بمذهب

(١) إن معنى الفصل بوجه عام ، كما قررنا ، يمكن استبداله باعتبار أنه لا يعرف ، بفصل القضايا التى تمرها دالة قضية .

الجوهر والأعراض ، ولكنه لا يؤدي إلى النتائج التقليدية . وكشفنا في الباب الخامس والسادس عن نظرية المحمولات ، فبيننا في الباب الخامس أن بعض التصورات المشتقة من المحمولات تقع في قضايا لا حول أنفسها بل « حول » تركيبات من الحدود كما يتبين من « جميع » ، « كل » ، « أى » ، « واحد » ، « بعض » ، « أله » . ورأينا أن التصورات من هذا النوع أساسية في الرياضة وتجعلنا قادرين على النظر في الفصول اللامتناهية بواسطة قضايا ذات تعقيد متناه . وميزنا في الباب السادس المحمولات ، وفصول التصورات ، وتصورات الفصول ، والفصول ككثير ، والفصول كواحد . واتفقنا على أن الحدود المفردة ، أو مثل هذه التركيبات التي تنتج عن الجمع بالواو ، هي فصول ، والأخيرة منها هي الفصول ككثير . وأن الفصول ككثير هي الأشياء التي تدل عليها تصورات الفصول ، التي هي جمع فصول التصورات . ولكننا في الباب الحاضر انتهينا إلى أنه من الضروري التمييز بين الحد المفرد وبين الفصل الذي إنما هو حده الوحيد ، مما يترتب عليه إمكان قبول الفصل الصفر .

ولخصنا في الباب السابع دراسة الفعل . ورأينا أن القضايا الحملية المركبة من موضوع ومحمول ، والقضايا التي تعبر عن علاقة ثابتة بحد ثابت ، يمكن تحليلها كما رأينا إلى موضوع وحكم ؛ ولكن هذا التحليل يصبح مستحيلا عندما يدخل حد معين في قضية بطريقة أكثر تعقيدا من مجرد أن يكون متعلقا به للعلاقة . ومن أجل ذلك وجب أن نأخذ دالة القضية على أنها فكرة أولية . ودالة قضية لمتغير واحد هي أى قضية لمجموعة Set تعرف بتغير حد مفرد على حين تظل الحدود الأخرى ثابتة . ولكن على العموم من المستحيل تعريف أو عزل العنصر الثابت في دالة قضية ما دام الذى يتبقى حين يطرح حد معين حين يقع من قضية ليس بوجه عام شيئا يقبل الكشف عنه . وهكذا لا يجب أن يحذف ببساطة الحد المذكور بل يستبدل بمتغير به .

ورأينا أن معنى المتغير في غاية التعقيد . ذلك أن s ليس مجرد « أى » حد ، بل هو أى حد له فردية معينة ، وإلا ما أمكن التمييز بين أى متغيرين . واتفقنا

على أن المتغير هو أى حد من حيث إنه حد فى دالة قضية معينة ، وأن المتغيرات تتميز بدوال القضايا الى تقع فيها ، أو فى حالة وجود متغيرات عدة ، بالموضع الذى تشغله فى دالة قضية معطاة كثيرة التغيرات . وقد قلنا إن المتغير هو الحد فى أى قضية ذات هيئة تدل عليها دالة قضية معينة .

وقد وضحنا فى الباب التاسع أن القضايا العلاقية نهائية ، ولها جميعا جهة : نعى ما دامت العلاقة هى تصور ، من حيث هو كذلك ، فى قضية لها حدان ، فهناك قضية أخرى تشتمل على نفس الحدين ونفس التصور ، من حيث هو كذلك ، كما فى قولنا « أكبر من ب » و « ب أكبر من ا » . وهاتان القضيتان على الرغم من اختلافهما يشتملان بالضبط على نفس المفردات . وهذا شئ من خصائص العلاقات ، ومثال على الحسارة الناتجة من التحليل . واتفقنا على أن العلاقات يجب أن تؤخذ مفهوماً لا كفصول ذات روابط ^(١) .

وأخيراً فى الباب الحاضر بحثنا التناقض الناتج من الحقيقة الظاهرة وهى أنه إذا كان ه هو فصل جميع الفصول التى كحلود مفردة ليست حلوداً لأنفسها ككثير ، إذن ه كواحد يمكن إثباته على السواء بأن يكون أو لا يكون حداً لنفسه ككثير . وكان الحل المقترح أنه من الضروري التمييز بين أصناف متعددة من الأشياء ، نعى الحلود ، وفصول الحلود ، وفصول الفصل ، وفصول روابط الحلود ، وهكذا . وأن دالة القضية ه س تحتاج بوجه عام إذا وجب أن يكون لها معنى إلى أن تنتمى س لصنف واحد ماً . وهكذا فإن س هى س أخذت على أنها لا معنى لها لأنها تحتاج إلى أن يكون المتعلق فصلاً مركباً من أشياء هى من نفس الصنف المتعلق به . وقلنا إن الفصل كواحد حيثما يوجد فهو من نفس الصنف كمفرداته ؛ ولكن دالة القضية التريعية يظهر على العموم أنها إنما تعرف فصلاً ككثير ، ويثبت التناقض أن الفصل كواحد إن وُجد على الإطلاق ، فلا نزاع فى غيابه أحياناً .

(١) ومع ذلك انظر فى هذه النقطه الملحق .

فهرس

صفحة	
٥	مقدمة الطبعة الثانية
٢١	تمهيد

الجزء الأول

اللامعرفات فى الرياضه

٣١	الباب الأول : تعريف الرياضه البحتة
٤١	الباب الثانى : المنطق الرمزى
٤٥	(ا) تحليل القضايا
٥٢	(ب) الحساب التحليلى للفصول
٦٠	(جـ) الحساب التحليلى للعلاقات
٦٤	(د) المنطق الرمزى لبيانو
٧٤	الباب الثالث : اللزوم واللزوم الصورى
٨٧	الباب الرابع : أسماء الأعلام والصفات والأعمال
١٠٢	الباب الخامس : الدلالة
١٢١	الباب السادس : الفصول
١٤٥	الباب السابع : دوال القضايا
١٥٦	الباب الثامن : المتغير
١٦٥	الباب التاسع : العلاقات
١٧٤	الباب العاشر : التناقض

تم طبع هذا الكتاب على مطابع
دار المعارف بمصر سنة ١٩٥٨

أُصُولُ الْإِثْرَاضِئَاتِ

جامعة الدول العربية
الإدارة الثقافية

مكتبة
الدراسات الفلسفية

برتراند رسل

أصول الرياضيات

٢

ترجمة

الدكتور محمد منبى أحمد و الدكتور أحمد فؤاد الأهواني



دار المعارف بمصر

الجزء الثاني

العدد

الباب الحادى عشر

تعريف الأعداد الأصلية

١٠٧ — لقد انتهينا الآن من استعراض جهاز المعانى المنطقية العامة التى تعمل بها الرياضه . وسنمين فى هذا المجلد الثانى كيف أن هذا الجهاز ، دون حاجة إلى جديد من اللامعرفات ولا المسلمات ، يكفى لأن تقوم عليه نظرية الأعداد الأصلية بأجمعها كفرع خاص من فروع المنطق . ولقد أحرزت نظرية الحساب فى الوقت الحاضر من التقدم أكثر مما أحرز أى موضوع آخر من موضوعات الرياضه . ولقد اتجه فيرشتراس نحو صحة الاستنباط ، ولعت فى متابعة بحوثه أسماء ديد كند و كانتور ، وفريج و بيانو ، ويبدو أن هذا الاتجاه قد بلغ غايته عن طريق منطق العلاقات .

ولما كانت النظرية الرياضيه الحديثه غير معروفه معرفة تامه حتى عند غالبية الرياضيين أنفسهم ، فسأبدأ هذا المجلد بأربعة أبواب أوضح فيها معالم هذه النظرية فى صورة غير رمزية . ثم أتابع ذلك بالنظر فى عملية الاستنباط من وجهة النظر الفلسفيه على أصل من هذا إلى الكشف عما إذا كانت بعض القروض غير الظاهره قد أقحمت نفسها بصورة مستتره فى سبيل البرهان .

١٠٨ — وكثيراً ما نسلم بأن كلا من العدد والأعداد الخاصه هى مما لا يقبل التعريف ، ولكن القابليه للتعريف من وجهة النظر الرياضيه هى عبارة ذات معنى محدد ، وإن كان تحديدها هو دائماً بالنسبه إلى مجموعه معينه من المعانى . فإذا أعطيت مجموعه من المعانى فلن حدّاً مّا يمكن تعريفه عن طريق هذه المعانى إذا كان هو الحد الوحيد الذى له مع بعض هذه المعانى علاقه معينه هى فى حد ذاتها إحدى معانى المجموعه ، ولا يكون قابلاً للتعريف إلا إذا توفر هذا الشرط . ومن الناحيه الفلسفيه لم يستخدم لفظ التعريف فيما جرت به العاده بهذا المعنى إذ فى الواقع

قد اقتصر على تحليل فكرة ما إلى مكوناتها . وفي اعتقادي أن هذا الاستخدام مما لا يمكن الارتياح له ، وهو عديم الفائدة ، فضلاً عن أنه يغفل حقيقة أن الكُلَّات ، لا تتحدد في الغالب الأعم متى عرفت أجزائها ، بل هي في حد ذاتها أشياء (وقد تكون من بعض الوجوه بسيطة) تعرف من الوجهة الرياضية بعلاقات معينة بأجزائها . ومن أجل ذلك فسأصرف النظر عن الوجهة الفلسفية وأقتصر في الكلام عن الناحية الرياضية من القابلية للتعريف . ومع هذا فإنني مقيد لهذا المعنى بأكثر مما فعل بيانو ومن نحا نحوه . فهم يقولون بأن فروع الرياضة المختلفة لها مجموعات مختلفة من اللامعرفات بوصاطها يمكن تعريف باقي معاني هذه الفروع ، ولكني أقول : إن جميع الرياضة البحتة (بما في ذلك الهندسة والديناميكا النسبية) تشتمل على مجموعة واحدة من اللامعرفات وهي التصورات المنطقية الأساسية التي تكلمنا عنها في المجلد الأول . وسيكون من أهم الأغراض التي أضعها نصب عيني أن أثبت هذا القول . وعند ما نسرد شتى الثوابت المنطقية فإن أمر اعتبار أيها مما لا يقبل التعريف أمر اختياري إلى حد ما ، ولو أن بعضها سيكون مما لا يقبل التعريف في أية نظرية كانت . ولكني أذهب إلى أن كل ما لا يقبل التعريف في الرياضة البحتة هو من هذا النوع الأخير ، وأن ظهور غيرها مما لا يقبل التعريف هو دليل على أن الموضوع من موضوعات الرياضة التطبيقية . وقد سلم بيانو بثلاثة أنواع من التعريف : التعريف الاسمي ، والتعريف بالمسلمات ، والتعريف بالتجريد ^(١) . ومن هذه الأنواع لا أعترف إلا بالاسمي ، وأما الآخران فلم تكن لنا فيما يبدو حاجة إليهما لولا رفض بيانو اعتبار العلاقات جزءاً من الجهاز الاسمي في المنطق ، ولولا تسرعه في اعتبار الفرد ما كان في الحقيقة فضلاً . وأحسن ما يوضح هذه الملاحظات هو النظر في تطبيقها على تعريف الأعداد الأصلية .

١٠٩ — كان الشائع في الماضي — بين من يقولون بإمكان تعريف الأعداد —

(١) انظر Burali-Forti, "Sur les différentes définitions du nombre réel"

Congrès, III, p. 294 ff.

أن يستثنى العدد ١ من هذه القاعدة ، وأن تعرف باقي الأعداد عن طريقه . فالعدد ٢ كان $١ + ١$ ، ٣ هو $١ + ٢$ وهكذا . وهذه الطريقة لا يمكن تطبيقها إلا على الأعداد المنتهية ، وهي تضع فرقاً لا موجب له بين ١ والأعداد الأخرى ، فضلاً عن أنها لم تفسر لنا عادة معنى + . ونستطيع اليوم أن ندخل تحسناً كبيراً على هذه الطريقة . ففي أول الأمر ، لما كان كانتور قد بين كيف نعالج اللانهاية فقد أصبح في إمكاننا — وهذا أمر مرغوب فيه أيضاً — أن نعالج الخصائص الأساسية للأعداد بطريقة يمكن تطبيقها على الأعداد المنتهية وغير المنتهية على حد سواء . ومن جهة ثانية قد مكنتنا الحساب التحليل المنطقي من إيجاد تعريف مضبوط لعملية الجمع في الحساب . ثم من جهة ثالثة قد أصبح تعريف ٠ (صفر) ، ١ سهلاً كتعريف أى عدد آخر . ولكي أوضح كيف يمكن عمل هذا سأبدأ بوضع تعريف الأعداد بالتجريد ، ثم أبين العيوب الصورية في هذا التعريف ، وأستعيض عنه بالتعريف الاسمي .

ومن المسلم به أنه يمكن تطبيق الأعداد أساساً على الفصول ، حقاً إنه عندما يكون العدد متناهياً ، فإنه يمكن عد الأفراد التي تكون هذا العدد ، ويمكن عدّها واحداً واحداً دون ذكر لفصل تصوراً ، ولكن كل المجاميع المنتهية من الأفراد تكون فصولاً ، ولذلك فإن ما نحصل عليه هو في آخر الأمر جميع عدد الفصل ، وعند ما يكون العدد لامتناهياً فلا يمكن عد أفرادهِ ، ولا بد من تعريفه بالمفهوم ، أى بخاصية مشتركة بين الأفراد بفضلها تكون فصلاً . نخرج من هذا أننا إذا علمنا فصل تصوراً فإن هناك عدداً من الأفراد ينطبق عليها فصل التصور هذا ، وحيث يمكن اعتبار هذا العدد خاصية من خصائص الفصل . وبفضل وجهة النظر هذه أمكن بناء نظرية اللانهاية كلها لأنها أعفتنا من الحاجة إلى عد الأفراد التي نتكلم عن عددها ، وتعتمد وجهة النظر هذه أساساً على فكرة « الجميع » ، أى العطف العددي كما اصطللنا عليها (بند ٥٩) . فجميع الناس ، مثلاً ، تدل على الناس مجتمعين بطريقة خاصة ، وبهذه الدلالة فلهم عدد . وبالمثل « جميع الأعداد » أو « جميع النقط » تدل على الأعداد أو النقط

مجموعة بطريقة خاصة ، وباجتماع الأعداد أو النقط هكذا فلها عدد .
فالأعداد إذن يجب أن تعتبر خواص للفصول .

والسؤال التالى هو : متى يكون لفصلين نفس العدد ؟ وجواب هذا ، أن لهما نفس العدد عند ما ترتبط حدودهما ارتباط واحد بواحد ، فيكون أى حد من أحدهما يناظر حداً فى الفصل الآخر ولا يناظر سواه . ويتطلب هذا وجود علاقة واحد بواحد ميدانها أحد الفصلين وميدانها العكسى هو الفصل الآخر . فمثلاً فى المجتمع الذى فيه جميع الرجال وجميع النساء متزوجون ، والذى لا يسمح فيه بتعدد الأزواج أو الزوجات ، يكون عدد الرجال هو نفس عدد النساء . وقد يتبادر إلى الذهن أن علاقة واحد بواحد لا يمكن تعريفها دون الإشارة إلى العدد ١ . وليس هذا هو الحال ، فالعلاقة هى علاقة واحد بواحد إذا كانت ص ، ص لهما هذه العلاقة مع ص ، فإن ص ، ص متطابقان . بينما إذا كانت ص لهما هذه العلاقة مع ص ، ص فإن ص ، ص متطابقان . وكذلك يمكن دون استخدام فكرة الوحدة أن نعرف ماذا نعنى بعلاقة واحد بواحد . ولكي نستطيع أن نعالج حالة الفصلين اللذين لحدود لهما يجب أن نعدل قليلاً ما نعنيه بقولنا : إن فصلين لهما نفس العدد ، لأنه إذا لم توجد الحدود ، فالحدود لا يمكن ارتباطها ارتباط واحد بواحد . بل يجب أن نقول : يكون لفصلين نفس العدد إذا وجدت علاقة واحد بواحد ميدانها يشتمل على أحد الفصلين بحيث يكون فصل نظائر حدود أحد الفصلين متطابقاً مع الفصل الآخر . ويتضح من هذا أن الفصلين اللذين لا حدود لهما يكون لهما دائماً نفس عدد الحدود ، لأننا لو أخذنا علاقة واحد بواحد أياً كانت ، فإن ميدانها يشتمل على الفصل الصفرى ، وفصل نظائر الفصل الصفرى ، هو مرة أخرى الفصل الصفرى . وعند ما يكون لفصلين نفس العدد يقال إنهما متشابهان .

وقد يذهب بعض القراء إلى أن تعريف ما نعنيه بقولنا إن لفصلين نفس العدد أمر لا لزوم له أبته ، وهم يقولون فى ذلك : إن الطريق لإثبات هذا هو أن نعد كلا الفصلين . ومثل هذه الأفكار هى التى حالت ، إلى وقت قريب ، دون

عرض الحساب كضرب من المنطق البحث . وإلا فإذا نفى بالعد ، وهو سؤال قلما نجد له جواباً غير جواب تفاسى لا يغنى شيئاً كالقول بأن العد عملية انتباه متعاقب . فلكى نعد ١٠ أفترض أنه يلزم لنا عشرة عمليات انتباه ، وبكل تأكيد ، هذا تعريف نافع جداً للعدد ١٠ ! والواقع أن للعد معنى قوياً ، ولكنه ليس نفسانياً ، ولكن هذا المعنى في غاية التعقيد ، وهو لا ينطبق إلا على الفصول ذات الترتيب الكامل ؛ وليست كل الفصول كذلك وهي لا تعطينا عدد الفصل إلا عند ما يكون هذا العدد متناهياً — وهي حالة استثنائية وفادرة الوقوع . ومن أجل ذلك لا ينبغي أن ندخل العد عند ما يكون الكلام عن تعريف الأعداد .

ولعلاقة التشابه بين الفصول ثلاث خصائص . فهي متعاكسة ومتماثلة ومتعدية . أى أنه إذا كانت y ، f ، g ، فصولاً فإن y شبيه بنفسه ، وإذا كان y يشابه f ، فإن f يشابه y ؛ وإذا كان y يشابه f . وكان f يشابه g ، فإن y يشابه g . وهذه الخصائص تنجم بسهولة من التعريف ، وفي نظر بيان أن هذه الخواص الثلاث للعلاقة تشير إلى أنه عند ما تقوم علاقة بين حدين ، فإن لحذين الحدين خاصية مشتركة ما ، وبالعكس . وهذه الخاصية المشتركة هي ما نسميه عددهما ^(١) . وهذا هو تعريف العدد بالتجريد .

١١٠ — ولكن هذا التعريف بالتجريد ، وبوجه عام العملية المستخدمة في مثل هذه التعاريف ، يشوبها عيب شكلي شنيع ، فهي لا تبين أن هناك موضوعاً واحداً يحقق التعريف . وعلى ذلك قبلنا من أن نحصل على خاصية واحدة مشتركة بين الفصول المتشابهة ، وهو عدد الفصل الذى نتكلم عنه ، نحصل على فصل من هذه الخواص ، ولا سبيل لنا لمعرفة كم من الحدود يشتمل عليها هذا الفصل . ولزيادة الإيضاح ، دعنا نبحث عما نعنيه في هذا الكلام بالخاصية المشتركة . والذى نعنيه هو أن أى فصل له مع شيء بالذات ، أى عدده ، علاقة لا تقوم معه ومع أى شيء آخر ، في حين جميع الفصول الشبيهة به (ولا شيء آخر) لها

ففس العلاقة مع العدد المذكور . أى أن هناك علاقة كثير بواحد تقوم بين كل فصل وعدده ولا تقوم بينه وبين أى شىء آخر ، ومقتضى التعريف بالتجريد هو : أى مجموعة من الأشياء لكل واحد منها فصل معين له معها علاقة معينة للكثير بالواحد ، وكل فصل معلوم له هذه العلاقة مع واحد وواحد فقط من هذه الأشياء ، وهذه الأشياء هي بحيث أن جميع الفصول الشبيهة بفصل معين لها هذه العلاقة مع شىء واحد بعينه من المجموعة . مثل هذه المجموعة هي مجموعة الأعداد ، وأى واحد من هذه المجموعة هو عدد فصل ما . فإذا كان هناك كثير من مثل هذه المجموعات من الأشياء ، ومن اليسير إثبات أن هناك عدداً لا نهائياً منها ، فلكل فصل أعداد كثيرة ، ويعجز التعريف عن أن يعرف عدد الفصل . وهذا القول صحيح بصفة عامة ، ويبين أن التعريف بالتجريد ليس عملية منطقية سليمة أبداً .

١١١ - وهناك طريقتان نستطيع بهما أن نحاول علاج هذا العيب . إحداهما أن نعرف عدد الفصل بأنه كل فصل الأشياء ، بحيث نختار شيئاً واحداً من كل مجموعة من مجموعات الأشياء السابقة ، والذي له مع جميع الفصول المشابهة للفصل المعلوم علاقة ما لكثير بواحد أو غير ذلك .

ولكن هذه الطريقة عديمة الجدوى من الناحية العملية ، لأن جميع الأشياء دون استثناء ، تتبع كل فصل من هذا النوع ، ولذلك فسيكون كل فصل له عدد هو فصل جميع الأشياء من كل نوع ومن كل وصف . والعلاج الآخر ، وهو الأفضل من الوجهة العملية ، وينطبق على جميع الحالات التى يستخدم فيها بيانو التعريف بالتجريد . وهذه الطريقة هي أن يعرف عدد الفصل بأنه فصل جميع الفصول المشابهة للفصل المعلوم . وعضوية فصل الفصول هذا (باعتباره معمولاً) هي خاصة مشتركة لجميع الفصول المشابهة وليست لغيرها . وفضلاً عن ذلك فكل فصل من مجموعة الفصول المشابهة له مع المجموعة علاقة لا تقوم بينه وبين أى شىء آخر ، وهي تقوم لكل فصل وبين مجموعته ، وبذلك يحقق فصل الفصول هذا الشروط تحقيقاً كاملاً ، وله ميزة التحديد عندما يُعلم الفصل

وأنه يختلف بالنسبة لفصيلين غير متشابهين ، فهذا إذن تعريف ، لا مأخذ فيه ،
لعدد الفصل في عبارة منطقية بحتة .

وإن اعتبار العدد فصل فصول قد يبدو لأول وهلة من المتناقضات التي
لا يمكن الدفاع عنها — وفي ذلك يقول بيانو: « لا تمكن مطابقة عدد (الفصل) ١
بفصل الفصول الذي نتكلم عنه (أى فصل الفصول المشابهة للفصل ١) لأن هذه
الأشياء ذات خواص مختلفة » . وهو لا يذكر لنا ما هي هذه الخواص ، وأجد
نفسى عاجزاً عن الكشف عنها . ومن المحتمل أنه بدا له من أول الأمر أن العدد
ليس فصل فصول ؛ ومع ذلك يمكن أن يقال شيء لتخفيف مظهر هذا التناقض .
فأولاً : تدل كلمة زوج أو ثلاثي فعلاً على فصل فصول . وما علينا أن نقول ،
مثلاً ، إن « رجلين » يعنى « حاصل الضرب المنطقي لفصل الرجال وزوج »
وقولنا : « يوجد رجلان » معناه « يوجد فصل من الرجال هو أيضاً زوج » . وثانياً : إذا
تذكرنا أن فصل التصور ليس في حد ذاته مجموعة ولكنه خاصية تعرف بها
المجموعة ، علمنا أننا إذا عرفنا العدد بأنه فصل التصور لا الفصل ، فإن العدد يعرف
في الواقع كخاصية مشتركة لمجموعة من الفصول المتشابهة ولا تقوم لشيء آخر .
وهذا يزيل مظهر التناقض البادى للدرجة كبيرة ، ولكن هناك صعوبة
فلسفية في وجهة النظر هذه ، وبوجه عام ، في الصلة بين الفصول والمحمولات .
فقد توجد محمولات كثيرة مشتركة لمجموعة معينة من الأشياء لا غيرها . وفي
هذه الحالة تعتبر هذه المحمولات متكافئة من وجهة نظر المنطق الرمزي
ويقال إن أى واحد منها مساو لأى محمول آخر ، وعلى ذلك إذا عرفنا المحمول
بمجموعة الأشياء ، فلا نحصل عادة على محمول واحد ، ولكن على فصل من
المحمولات ، ولهذا الفصل من المحمولات نحتاج إلى فصل تصور جديد ، وهكذا .
وليس أمامنا فصل تصور غير « قابلية مجموعة معينة من الحدود للحمل ولا لشيء
آخر » ولكن في هذه الحالة ، التي نعرف فيها المجموعة بواسطة علاقة معينة لها
مع واحد من حدودها ، هناك خطر الوقوع في خطأ منطقي . فإذا كانت ي
فصلاً ، فإننا نقول إن عدد ي هو فصل الفصول المتشابهة مع ي . ولكن

« المتشابهة مع y » لا يمكن أن يكون التصور الفعلي الذي يكون العدد y ، لأنه لو كان F متشابهاً مع y ، فإن « المتشابهة مع F » تعرف نفس الفصل ، مع أنه تصور آخر . من أجل ذلك نحتاج في تعريف محمول فصل الفصول المتشابهة إلى تصور ماً ليست له علاقة خاصة مع واحد أو أكثر من الفصول المكونة . فبالنسبة لأي عدد خاص نذكره بالذات ، سواء أكان متناهياً أم غير متناه ، يمكن الكشف في واقع الأمر عن مثل هذا المحمول ، أما إذا كان كل ما عندنا عن العدد هو أنه عدد فصل ماً y ، فمن الطبيعي أن تظهر إشارة خاصة للفصل y في التعريف . وليس هذا هو المهم ، إنما المهم أن المعرف هو واحد بعينه سواء استغلنا المحمول « متشابهة مع y » أو « متشابهة مع F » ما دام y يشابه F ، وهذا يوضح أن المعرف ليس له فصل التصور أو المحمول المعرف ، ولكنه هو الفصل ذاته ، والذي حدوده هي شتى الفصول المتشابهة مع y أو F ، ومثل هذه الفصول إذن ، لا المحمولات من مثل « متشابهة مع y » ، هي التي يجب أن تعتبر مكونة للأعداد .

والخلاصة ، فالعدد ، من الوجهة الرياضية ، ليس شيئاً آخر سوى فصل الفصول المتشابهة . وهذا التعريف يسمح باستنتاج جميع الخواص العادية للأعداد سواء كانت متناهية أم لا متناهية ، وهو إلى حد علمي التعريف الوحيد الممكن في حدود التصورات الأساسية للمنطق العام . ولكن من الوجهة الفلسفية يمكن التسليم بأن كل مجموعة من الفصول المتشابهة لها محمول ماً مشترك ، لا ينطبق على أشياء غير الفصول التي نتكلم عنها ، وإذا وجدنا بعد الفحص أن هناك فصلاً معيناً من مثل هذه المحمولات المشتركة ، ومنها محمول واحد ، ولا يوجد غيره ، ينطبق على كل مجموعة من الفصول المتشابهة ، فإنه يكون في مكتنتنا إذا استحسننا ذلك أن نسمي فصل المحمولات هذا فصل الأعداد . وإني من جهتي لا أعرف أيوجد فصل المحمولات هذا ، ولكني أعرف أن مثل هذا الفصل إن وجد فإنه يكون غريباً تماماً عن الرياضيات . وكلما اشتقت الرياضيات خاصة مشتركة من علاقة عكسية أو متباعدة أو متعدية تحققت جميع الأغراض الرياضية لتلك الخاصية المشتركة

تحققاً تاماً إذا استبدلنا بها فصل الحدود التي لها العلاقة المعلومة مع حد معلوم .
وهذا بالضبط هو ما تعلمه لنا الأعداد الأصلية . ومن أجل ذلك فسألتم
في كل ما يلي التعريف السابق ، لأنه يجمع بين الدقة والكفاية لجميع الحاجيات
الرياضية .

الباب الثاني عشر

الجمع والضرب

١١٢ - لعل أغلب التأليف الرياضية عن العمليات الحسابية تقع في خطأ حينما تحاول أن تبدأ بتعريف ينطبق على الأعداد المنطقة، أو حتى الأعداد الحقيقية دون إمعان النظر إمعاناً كافياً في نظرية الأعداد الصحيحة . وفي الوقت الحاضر ستكون الأعداد الصحيحة وحدها موضع اهتمامنا . وواضح أن تعريف الأعداد الصحيحة كما أوضحناه في الباب السابق لا يسمح بالتعميم على الكسور ، وفي الواقع إن الفرق المطلق بين الأعداد الصحيحة والكسور ، وحتى بين الأعداد الصحيحة والكسور التي مقامها الوحدة ، هو مما لا يمكن بحال المغالاة في توكيده . وسأحاول في مرحلة تالية أن أفسر ما هي الأعداد المنطقة وما هي الأعداد الحقيقية ، كذلك سأترك جانباً الآن الكلام عن الأعداد الموجبة والسالبة ، والأعداد الصحيحة التي نتكلم عنها الآن ليست موجبة ولكنها عديمة الإشارة . وعلى ذلك فالجمع والضرب اللذين نعرفهما في هذا الفصل لا ينطبقان إلا على الأعداد الصحيحة فقط ، ولكن لهما ميزة انطباقهما على الأعداد الصحيحة المنتهية واللامنتهية على السواء . وسألترم بكل دقة في الوقت الحاضر إبعاد جميع القضايا التي تدخل فيها تناهي أو لا تناهي الأعداد .

١١٣ - لا يوجد غير نوع أساسي واحد من الجمع ألا وهو النوع المنطقي . ويمكن تعريف جميع الأنواع الأخرى بدلالة هذا النوع والضرب المنطقي ، وفي هذا الباب سنعرف جميع الأعداد الصحيحة بهذه الطريقة . والجمع المنطقي ، كما بينا في المجلد الأول ، هو كالاتصال تماماً . فإذا كانت u ، v قضيتين فإن مجموعهما المنطقي هو القضية « u أو v » . وإذا كان u ، v فصلين فإن مجموعهما المنطقي هو الفصل « u أو v » أي الفصل الذي يتبعه كل حد

تابع الفصل ى أو للفصل ف . ويمكن تعريف المجموع المنطقى لفصلين ى ، ف بدلالة حاصل الضرب المنطقى لفصيلتين بأنه فصل الحدود التابعة لكل فصل يحتوى على كل من الفصلين ى ، ف ^(١) ، ولا يقتصر هذا التعريف بالضرورة على فصلين ولكنه يمكن أن يعمم إلى فصل فصول ، سواء كان متناهياً أو لا متناهياً . فإذا كان ϵ فصل فصول فإن المجموع المنطقى للفصول التى يتكون منها ϵ (وسأسميه من باب الاختصار مجموع ϵ) هو فصل الحدود التابعة لكل فصل يحتوى كل فصل يكون حداً من حدود ϵ . وهذه الفكرة هى أساس الجمع فى الحساب . فإذا كان ϵ فصل فصول ليس فيها فصلان بينهما حدود مشتركة (ومن باب الاختصار نسميه غير مشتركة Exclusive Class of Classes) فالمجموع الحسابى لأعداد مختلف فصول ϵ هو عدد الحدود التى فى المجموع المنطقى للفصل ϵ . وهذا التعريف ذو صفة عامة وينطبق ، سواء كان ϵ أو أى من الفصول المكونة له ، متناهياً أم لا متناهياً . ولكى نطمئن إلى أن العدد الذى نحصل عليه إنما يتوقف على أعداد مختلف فصول ϵ ولا يتوقف على الفصل الخاص ϵ الذى يصدف اختياره ، يلزم أن نثبت (وهذا أمر سهل) أنه إذا كان ϵ فصل فصول غير مشتركة متشابهاً مع ϵ وكان كل عضو فى ϵ متشابهاً مع نظيره فى ϵ والعكس بالعكس ، كان عدد الحدود فى مجموع ϵ نفسه عدد الحدود فى مجموع ϵ . فثلاً لنفرض أن ϵ لمحدان فقط ى ، ف ، ولنفرض أن ى ، ف ليس بينهما جزء مشترك ، فإن عدد الحدود فى المجموع المنطقى للفصلين ى ، ف هو مجموع عدد الحدود فى ى وفى ف . وإذا كان ى متشابهاً مع ى ، ف متشابهاً مع ف ، ولم يكن بين ى ، ف جزء مشترك فإن مجموع ى ، ف يكون متشابهاً مع مجموع ى ، ف .

١١٤ — ويجب أن نلاحظ أن هذا التعريف لمجموع الأعداد ، لا يمكن أن يتخلص من الإشارة إلى الفصول التى لها الأعداد التى نتكلم عنها . والعدد الذى

نحصل عليه بالجمع هو أساساً عدد المجموع المنطقي لفصل فصول معين أو لفصل ماً متشابه معه من الفصول المتشابهة . وتظهر هذه الحاجة إلى الإشارة إلى الفصول عند ما يتكرر العدد الواحد مرتين أو أكثر في المجموع . وما ينبغي ملاحظته أن الأعداد ليس لها « ترتيب » في المجموع ، ولذلك فلسنا بحاجة إلى قضية مثل قانون التبادل، فإن هذه القضية ، على النحو الذي تدخل به في الحساب ، إنما تنشأ من عيب في الرمزية ينجم عنه ترتيب في الرموز ليس لها ترتيب مناظر بين الأشياء المرموز لها . ونظراً لانعدام الترتيب فإن العدد إذا حدث مرتين في عملية جمع ، فلا سبيل لنا إلى التمييز بين الحدوث الأول والحدوث الثاني لمثل هذا العدد . وإذا استبعدنا الإشارة للفصول التي لها هذا العدد فليس هناك أى معنى لحدوثه مرتين ، ويمكن تعريف عملية جمع فصل من الأعداد، ولكن لا يمكن أن يتكرر العدد في هذه الحالة . أما في التعريف السابق للمجموع ، فالأعداد التي نتكلم عنها معرفة كأعداد فصول معينة ، ولذلك فلا حاجة بنا أن نقرر إذا كان العدد يتكرر أو لا يتكرر . ولكن لكي نعرف مجموع أعداد بعضها مكرر دون الإشارة إلى فصول معينة ، يلزم أن نعرف الضرب أولاً .

وزيادة في توضيح هذه النقطة نأخذ حالة خاصة مثل $1 + 1$ ، ومن الواضح أنه لا يمكن أن نأخذ العدد ١ ذاته مرتين ، لأن هناك عدداً واحداً هو ١ ولا توجد له حالتان . ولو أن المسألة هي الجمع المنطقي للعدد واحد لنفسه ، أوجب أن نجد أن $1 + 1$ هو ١ بحسب القواعد العامة للمنطق الرمزي . وكذلك لا يمكن تعريف $1 + 1$ بأنه المجموع الحسابي لفصل معين من الأعداد . ويمكن تطبيق هذه الطريقة بالنسبة لمجموع $1 + 2$ ، أو أى مجموع آخر لا يتكرر فيه أى عدد ولكن بالنسبة للمجموع $1 + 1$ فصل الأعداد الوحيد الذي يدخل في الأمر هو الفصل الذي حده الوحيد ١ ولما كان لهذا الفصل عضو واحد لا عضوان فلا يمكن تعريف $1 + 1$ عن طريقه . وبذلك يكون التعريف الكامل للمجموع $1 + 1$ هو ما أتى : $1 + 1$ هو عدد فصل : وهو المجموع لفصلين Y ، F ليس بينهما حد مشترك ، ولكل منهما حد واحد لا غير . وأهم ما تجب ملاحظته هو أن الجمع

المنطقي للفصول هو الفكرة الرئيسية ، أما الجمع الحسابي للأعداد فيأتي بأكمله بعد ذلك .

١١٥ — والتعريف العام للضرب من وضع الأستاذ هوبنيد^(١) ، وهو كما يأتي : ليكن \mathcal{E} فصل فصول ليس فيها فصلان بينهما حد مشترك ، ولنكون ما يسمى فصل \mathcal{E} المضروب وهو فصل كل حد فيه فصل مكون بأخذ حد لا غير من كل فصل من الفصول المكونة للفصل \mathcal{E} . فيكون عدد حدود فصل \mathcal{E} المضروب هو حاصل ضرب أعداد مختلف الفصول المكونة للفصل \mathcal{E} . ولهذا التعريف ميزتان تجعله يفضل أى تعريف وضع إلى الآن ، ومثله في هذا مثل تعريف الجمع المذكور سابقاً . وأولى هاتين الميزتين أن التعريف لا يدخل ترتيباً بين الأعداد المضروبة . وعليه فليست بنا من حاجة إلى قانون التبادل وهو الذى يهم بالهوز ، لا بالشئ المروزل إليه كالحال في الجمع تماماً . وثانيتهما أن التعريف المذكور لا يتطلب منا أن نقرر بالنسبة للأعداد التى نتكلم عنها ، فيما إذا كانت هذه الأعداد متناهية أو لا متناهية . ولقد وضع كانتور^(٢) تعريفاً لكل من مجموع وحاصل ضرب عددين ، ودون حاجة للبحث فيما إذا كان كل من العددين متناهياً أو لا متناهياً . ويمكن أن يمتد هذان التعريفان ليشملا مجموع أو حاصل ضرب أى عدد « متناه » من الأعداد المتناهية أو اللامتناهية ، ولكنهما في وضعهما الحالى لا يصلحان لتعريف مجموع أو حاصل ضرب عدد لا متناه من الأعداد . وهذا النقص الكبير قد عولج في التعريفين السابقين ، وبفضلهما يمكن السير في دراسة الحساب ، كما ينبغي ، دون التمييز بين المتناهى واللامتناهى إلى أن يحين الوقت لدراسة ذلك . وفي تعريفى كانتور أيضاً عيب شكلى يداخلهما الترتيب على الأعداد المجموعة أو المضروبة . ولكن في حالته هذه ، هذا مجرد عيب في اختيار الرموز لا في الأفكار التى ترمز لها هذه الرموز ، فضلاً عن أنه ، في حالة مجموع أو حاصل ضرب عدد « اثنين » ، لا يكون من المرغوب فيه من

الناحية العملية تجنب هذا العيب الشكلي لأن التعقيد الذي ينجم عن ذلك كبير للدرجة غير محتملة .

١١٦ - ومن السهل أن نستتبع من التعريفين السابقين الصلة العادية بين الجمع والضرب ، والتي يمكن وضعها في الصورة الآتية : إذا كان k فصلاً مكوناً من b من الفصول غير المشتركة ، وكل فصل منها يحتوي على a من الحدود ، فإن المجموع المنطقي للفصل k يحتوي على $a \times b$ حداً ^(١) . ومن السهل أيضاً إيجاد تعريف $a \cdot b$ ، وإثبات قانوني الترتيب والتوزيع والقوانين الصورية للقوى من مثل $a \times 1 = 1 \times a = a + 0 = a$. ولكن يجب أن نلاحظ أن الرفع إلى القوى لا ينبغي أن يعتبر عملية مستقلة لأنها مجرد تطبيق للضرب . ومع التسليم بإمكان تعريف الرفع إلى القوى تعريفاً مستقلاً كما فعل كانتور لا نرى ميزة في عمل كهذا . فضلاً عن أن الرفع إلى القوى لا يمكن بحال أن يستبعد أفكار الترتيب ما دام $a \cdot b$ لا تساوى $b \cdot a$ بصفة عامة . ولهذا السبب فنحن لا نستطيع تعريف نتيجة عدد لا نهائى من الرفع إلى القوى . ومن أجل ذلك سنتظر إلى القوى على أنها مجرد اختصار لحواصل ضرب فيها جميع الأعداد المضروبة في بعضها متساوية .

ومن هذه المادة التي بين يدينا يمكن استنباط جميع القضايا التي تنطبق سواء على الأعداد المنتهية واللامتناهية . وخطوتنا التالية ، إذن ، هي البحث في الفرق بين المنتهى واللامنتهى .

(١) انظر هوليبيد ، المرجع السابق .

الباب الثالث عشر

المتناهي واللامتناهي

١١٧ - ليس من أغراضنا في الباب الحالي أن نبحث في الصعوبات الفلسفية المتعلقة باللامتناهي، وستُحلّ ذلك إلى الجزء الخامس. وما أرى إليه الآن هو أن أضاع باختصار النظرية الرياضية للمتناهي واللامتناهي، كما تظهر في نظرية الأعداد الأصلية. وهذه هي صورتها الأساسية التي لا تدانيها في ذلك صورة أخرى. وينبغي أن يفهمها الإنسان حتى يتمكن من أن يفسر اللانهاية الترتيبية تفسيراً مقبولاً.

ليكن γ فصلاً ما، وليكن γ' فصلاً يتكون بحذف حد واحد من γ عندئذ قد يكون γ' متشابهاً مع γ ، وقد لا يكون متشابهاً معه. فمثلاً إذا كان γ فصل جميع الأعداد المنتهية، و γ' فصل جميع الأعداد المنتهية ما عدا الصفر فإن حدود γ' يحصل عليها بإضافة ١ إلى كل حد من حدود γ ، وهذا يجعل الحد الواحد من γ يناظر حداً واحداً من γ' والعكس بالعكس، لا تترك في ذلك حداً من أي من الفصول، ولا نأخذه مرتين. وبذلك يكون γ' متشابهاً للفصل γ . أما إذا كان γ مكوناً من جميع الأعداد المنتهية إلى العدد n حيث n عدد متناه ما، وكان γ' مكوناً من جميع هذه الأعداد ما عدا الصفر، فإن γ' لا يكون متشابهاً للفصل γ — وإذا وجد حد واحد من γ يمكن حذفه من الفصل γ ويتبقى فصل متشابه γ' ، فإنه من السهل إثبات أنه إذا حذف أي حد آخر من γ بدلاً من γ' فإننا نحصل أيضاً على فصل متشابه مع γ — وعندما يمكن حذف حد من الفصل γ — ويتبقى فصل γ' متشابه مع γ تقول: إن γ فصل «لامتناه». وعندما لا يكون ذلك ممكناً تقول: إن γ فصل متناه. ويتبع عن هذين التعريفين أن الفصل الصفري متناه، لأنه لا يمكن حذف حد منه، ومن السهل إثبات أنه

إذا كان γ فصلاً متناهياً ، فإن الفصل المكون بإضافة حد واحد إلى الفصل γ يكون فصلاً متناهياً كذلك ، وبالعكس إذا كان هذا الفصل الأخير متناهياً كان γ متناهياً . وينتج عن هذا التعريف أن أعداد الفصول المنتهية ، عدا الفصل الصفري — تتغير إذا طرحنا منها ١ — أما أعداد الفصول اللامنتهية فلا تتغير بمثل هذه العملية ، ومن السهل إثبات أن مثل هذا صحيح بالنسبة لإضافة ١ .

١١٨ — في الفصول المنتهية إذا كان أحدها جزءاً حقيقياً من الآخر ، فإن عدد الأول أصغر من عدد الثاني (الجزء الحقيقي هو الجزء لا الكل) . وليس هذا صحيحاً بالنسبة للفصول اللامنتهية . وهذا التمييز جزء أساسي من التعريفين السابقين للمتناهى واللامتناهى ، وقد يكون أحد الفصيلين اللامتناهيين له عدد أكبر أو أصغر مما للفصل الآخر . ويقال إن الفصل γ أكبر من الفصل δ ، أو أن له عدداً أكبر من عدد الفصل δ ، عندما يكون الفصلان غير متشابهين ؛ ولكن δ متشابه مع جزء حقيقى من γ ، ومن المعلوم أنه إذا كان γ متشابهاً مع جزء حقيقى من δ ، وكان δ متشابهاً مع جزء حقيقى من γ ، وهى حالة لا تنشأ إلا إذا كان كل من γ ، δ لامتناهياً ، فإن γ يكون متشابهاً مع δ ، ومن ذلك ينتج أن قولنا « γ أكبر من δ » لا يتفق مع قولنا « δ أكبر من γ » . ولسنا نعلم في الوقت الحاضر أن من بين كل عددين لانهائيين يجب أن يكون أحدهما أكبر والآخر أصغر من أخيه . ولكنه من المعلوم أن هناك عدداً لامتناهياً أصغر من جميع الأعداد اللامنتهية . وهذا هو عدد الأعداد الصحيحة ، وسنرمز إليه بالرمز \aleph_1 . ويمكن تعريف هذا العدد بعدة طرق ليس فيها ذكر الأعداد المنتهية . ففى الطريقة الأولى يمكن تعريفه عن طريق قاعدة الاستنباط الرياضى (كما فعل كانتور ضمناً) وهذا هو التعريف :

١ : هو عدد أى فصل γ يكون ميداناً لعلاقة واحد لواحد ع ميدانها العكسى مشتمل في γ ولكنه غير متفق معه في الامتداد not coextensive with وإذا كان بحيث ، إذا أسمينا الحد الذى له مع δ العلاقة ع بتالى δ ، وكان δ أى فصل يتبعه حد من حدود γ ليس بذاته تالياً لأى حد آخر من حدود γ ،

ويتبعه تالى كل حد فى Y تابع للفصل S ، كان كل حد من حدود Y تابعاً للفصل S . ومرة أخرى يمكن تعريف A بالطريقة الآتية :

نفرض أن Y علاقة متعدية لامتناهية ، ونفرض أن كل حدين مختلفين فى مجال Y تقوم Y بينهما العلاقة Y أو عكسها ، ونفرض فوق ذلك أن أى فصل Y مشتمل فى مجال العلاقة Y ، إذا كانت له توالى (أى حدود لها مع كل حد من حدود Y العلاقة Y) فإنه يكون له نال مباشر أى حد يكون سالفه إما تابعاً للفصل Y أو سالفاً لحد ما من حدود Y ، ونفرض أن هناك حداً واحداً من مجال العلاقة Y ليس له أسلاف ، بيد أن كل حده أسلاف فله توابع ، وله أيضاً سالف مباشر ، عندئذ يكون عدد حدود مجال العلاقة Y هو A . ويمكن سرد تعاريف أخرى غير ذلك ، ولما كانت جميعها متكافئة فلا حاجة بنا إلى زيادة عددها . والخاصية الآتية كبيرة الأهمية : كل فصل عدده A . يمكن ترتيبه فى متسلسلة ذات حدود متعاقبة ، لها بداية وليست لها نهاية ، بحيث إن عدد أسلاف أى حد فى المتسلسلة يكون متناهياً ، وكل متسلسلة لها هذه الخصائص فعددها A .

ومن السهل إثبات أن كل فصل لامتناه يشتمل على فصول عدد حدود كل منها A . لذلك نفرض أن Y فصل لامتناه وأن S . حد من حدود Y ، وإذن فالفصل Y يكون متشابهاً مع الفصل الذى نحصل عليه بحذف الحد S . وهو الفصل الذى نسميه Y_1 وينتج من ذلك أن Y_1 فصل لامتناه ، ومن هذا الفصل نحذف حداً S_1 ونحصل على فصل لامتناه Y_2 وهكذا . فالمتسلسلة التى حدودها S_1, S_2, S_3, \dots مشتملة فى Y وهى من النوع الذى له العدد A . ومن هنا نسير إلى تعريف آخر للمتناهى واللامتناهى بواسطة الامتنباط الرياضى وهو ما سنشرحه حالاً .

١١٩ - إذا كان n عدداً متناهياً ، فإن العدد الذى نحصل عليه بإضافة ١ إلى n هو أيضاً متناه وهو مختلف عن n . فإذا بدأنا بالصفر (٠) أمكننا تكوين متسلسلة من الأعداد بالإضافة المتتالية للعدد ١ . ويمكننا إذا أردنا أن نعرف الأعداد المتناهية بأنها تلك الأعداد التى نحصل عليها من الصفر (٠)

خطوة خطوة ، والتي تخضع للاستنباط الرياضى . أى أن فصل الأعداد المتناهية هو فصل الأعداد المشتملة فى كل فصل ص يتبعه الصفر (٠) كما يتبعه تالى كل عدد تابع لـ ص ؛ والمقصود بتالى العدد ، هو العدد الذى نحصل عليه بإضافة ١ إلى العدد المعروف . والآن ا . ليس عدداً كهذا ، لأنه بحسب القضايا التى أثبتناها ، لا يمكن أن يكون عدد مثل هذا متشابهاً مع جزء من نفسه . ونخرج من هذا أن كل عدد أكبر من ا . لا يمكن أن يكون متناهياً بحسب التعريف الجديد . ولكن من السهل إثبات أن كل عدد أصغر من ا . يكون متناهياً بحسب التعريف الجديد أو القديم على السواء . وبذلك يكون التعريفان متكافئين . وعلى ذلك يمكن تعريف الأعداد المتناهية ، إما بأنها تلك التى فصل إليها عن طريق الاستنباط الرياضى عند ما نبدأ بالصفر ونزيد ١ فى كل خطوة ، أو بأنها أعداد تلك الفصول التى لا تكون متشابهاً مع أجزائها التى نحصل عليها بحذف حد واحد من كل . ولما كنا نستخلص كلا من هذين التعريفين كثيراً فمن المهم أن ندرك أن كل واحد منهما ينتج عن الآخر . وسنرجع كثيراً إلى كل من هذين التعريفين فيما بعد ، ولكننا معنيون فى الوقت الحاضر بوضع مجرد الخطوط العريضة للنظرية الرياضية للمتناهى واللامتناهى ، دون أن نخوض فى الخلافات ، ولاركين التفاصيل لتتولاها فى حينها فى مواضع أخرى من هذا الكتاب .

الباب الرابع عشر

نظرية الأعداد المنتهية

١٢٠ - بعد أن ميزنا بوضوح بين المنتهى واللامتناهى ، يمكن أن نبسط القول في الأعداد المنتهية . وقد جرت العادة في أفضل الكتب المؤلفة عن مبادئ الحساب ^(١) ، ألا تعرف العدد المنتهى أو الأعداد الخاصة المنتهية ، بل تبدأ ببعض البديهيات أو القضايا الأولية التي تشتق منها جميع النتائج المألوفة . وهذه الطريقة تجعل من الحساب دراسة مستقلة ، بدلا من النظر إليه كما فعلنا في هذا الكتاب ، كأنه فرع تطور عن المنطق العام دون حاجة إلى بديهيات أو لا معارف جديدة . ولهذا السبب يبدو أن تلك الطريقة تشير إلى درجة من التحليل أقل من الطريقة التي اصطنعناها هنا . ومع ذلك سأبدأ بعرض للطريقة التي جرت العادة على استعمالها ، ثم أنتقل إلى التعريفات والبراهين التي تؤخذ عادة على أنها لا معارف ولا مبرهنات . وسأتبع لتحقيق هذا الغرض عرض بيانو في كتابه « فورمولاير Formulaire » ^(٢) وهو بمقدار ما أعرف ، أفضل عرض من جهة الدقة والضببط . ويمتاز هذا العرض بأنه يبين أن جميع الحساب يمكن أن يقوم على ثلاثة معان أساسية (بالإضافة إلى المعاني الخاصة بالمنطق العام) . ثم خمس قضايا أساسية تتعلق بهذه المعاني . ويتبين من هذا العرض كذلك أن المعاني الثلاثة إذا اعتبرت محدة بالقضايا الخمس ، استقلت هذه القضايا عنها . ويتضح ذلك بإيجاد تفسير لكل مجموعة من أربعة قضايا يجعل القضية الخامسة باطلة . فليس أمامنا لكي نربط بين نظرية بيانو وتلك

(١) ما عدا كتاب فريج Grundgesetze der Arithmetik (Jena 1893)

(٢) فورمولاير ١٩٠١ ، الجزء الثاني ، فورمولاير ١٨٩٩ فقرة ٢٠ وما بعدها . وتختلف طبعة ١٩٠١ عن الطبقات السابقة في أنه يجعل هذه القضية « المعد فصل » قضية أولية ، ولا ضرورة هنا لهذا التمييز ما دام متطوفاً في هذه القضية « الصفر عدد » . لهذا السبب سأتابع الطبقات الأولى .

التي اصطنعناها هنا إلا أن نعطي تعريفاً للمعاني الثلاثة الأساسية وبرهاناً على القضايا الخمس الأساسية . فإذا فعلنا ذلك ، عرفنا بكل تأكيد أن كل ما نطلب الإحاطة به خاصاً بالأعداد الصحيحة المتناهية سيترتب على ذلك . واللامعرفات التي قال بها بيانو هي الصفر ، والعدد الصحيح المتناهي ، والتالي . ومن المسلم به فيما يختص بفكرة التتالي (ولو أني أظن أنه من الأفضل تقرير ذلك كبدئية منفصلة) أن كل عدد ليس له إلا تال واحد فقط . (والمقصود « بالتالي » طبعاً هو التالي المباشر) . وعلى ذلك قضايا بيانو الأصلية هي ما يأتي :

- (١) الصفر عدد .
- (٢) إذا كان n عدداً ، فإن التالي لـ n عدد .
- (٣) إذا كان لعددین نفس التالي ، فالعددان متطابقان .
- (٤) الصفر ليس تالياً لأي عدد .
- (٥) إذا كان s فصلاً ينتمي إليه الصفر وكذلك التالي لكل عدد ينتمي إلى s ، فيترتب على ذلك أن كل عدد ينتمي لـ s . وآخر هذه القضايا هي مبدأ الاستنباط الرياضي .

١٢١ — وقد برهن بيانو ويادوا على الاستقلال المتبادل بين هذه القضايا الخمس كما يأتي ^(١) : (١) إذا أعطينا المعاني العادية للصفر والتالي ، مع الدلالة على أن العدد هو الأعداد الصحيحة المتناهية ما عدا الصفر ، فإن جميع القضايا السالفة ما عدا الأولى صحيحة . (٢) إذا أعطينا المعاني العادية للصفر والتالي مع الدلالة على أن العدد إنما هو الأعداد الصحيحة المتناهية الأقل من ١٠ ، أو الأقل من أي عدد صحيح متناه معين specified ، فإن جميع القضايا السالفة ما عدا الثانية صحيحة . (٣) للتسلسلة series المتوالية التي تبدأ بدورة سابقة ثم تصبح دورية (مثال ذلك الأرقام digits في العدد العشري الذي يصبح دائرياً بعد عدد معين من المواضع) فلنمّا تحقق جميع القضايا السالفة ما عدا الثالثة . (٤) للتسلسلة الدورية periodic (مثل الأرقام الدالة على الوقت على وجه الساعة) فلنمّا تحقق جميع القضايا الأولية ما عدا الرابعة . (٥) إذا (١) ساستعمل لفظ العدد فيما يلي من هذا الفصل كرادف العدد الصحيح المتناهي .

أعطينا التالى هذا المعنى وهو المقدار الأكبر من ٢ بحيث يكون تالى الصفر ٢ ، وتالى ٢ هو ٤ وهكذا ، فإن جميع القضايا تتحقق ما عدا الخامسة ، لأنها لا تتحقق إذا كان س فصل الأعداد الزوجية بما فيها الصفر . وهكذا يتضح أن أى قضية من الخمسة لا يمكن استنتاجها من الأربعة الأخرى .

١٢٢ - ويشير بيانو إلى وجود فصول أخرى إلى جانب الأعداد الصحيحة المتناهية تحقق القضايا الخمسة السالفة ، وهذا نص أقواله : « توجد أنظمة لانهاية لها تحقق جميع القضايا الأولية ، وهى كلها متحققة ، مثال ذلك حين نستبدل بالعدد والصفر قولنا : « العدد غير الصفر وواحد » . وجميع الأنظمة التى تحقق القضايا الأولية لها علاقة تناظر الواحد بالواحد مع الأعداد . والعدد هو ما نحصل عليه بالتجربة من جميع هذه الأنظمة ؛ وبعبارة أخرى : العدد هو النظام الذى له جميع الخصائص ولا غير المينة فى القضايا الأولية » . وتبدولى أن هذه الملاحظة تنقصها الصحة المنطقية . وأول سؤال يتبادر إلى الذهن هو : كيف تتميز الأنظمة المختلفة التى تحقق القضايا الأولية ؟ كيف مثلاً يتميز النظام الذى يبدأ من ١ عن النظام الذى يبدأ من ٠ ؟ ويمكن الإجابة عن هذا السؤال بمجوابين مختلفين ، فقد يمكن أن نقول إن ٠ ، ١ كليهما فكرتان أوليتان ، أو على الأقل أن فكرة أولية ، وبناء على ذلك يمكن التمييز بين ٠ ، ١ تمييزاً حقيقياً ، كما يتميز اللون الأصفر عن الأزرق . ولكننا إذا سلمنا بهذه الوجهة من النظر - والتى بهذه المناسبة يجب أن تشمل الأفكار الأولية الأخرى ، العدد والتالى - فلا بد لنا من القول بأن هذه الأفكار الثلاثة هى التى أسميها ثوابت ، ولا حاجة لأى عملية من التجريد كما يذهب بيانو فى تعريف العدد . وبمقتضى هذه الطريقة يظهر الصفر والعدد والتالى ، كالمعارف الأخرى ، على أنها أفكار يجب الاعتراف بها ببساطة ، وهذا الاعتراف يؤدى إلى ما يسميه الرياضيون بنظرية الوجود ، أى يؤكد لنا وجود أعداد حقاً . غير أن هذا الطريق يجعل أمر الأعداد أمى ثوابت منطقية أم لا موضع شك ، ويترتب على ذلك أنه يجعل الحساب طبقاً للتعريف المذكور فى المجلد الأول ، الباب الأول

فرعاً لأول وهلة من فروع الرياضاة التطبيقية . وفضلاً عن ذلك فمن الواضح أن هذا الطريق ليس هو الذى خطر ببال بيانو . أما الجواب الآخر عن هذا السؤال فيقوم على اعتبار الصفر والعدد والتالى كأنها فصل من أفكار ثلاثة تتعلق بفصل معين مكون من أمور ثلاثة معرفة بالقضايا الخمسة الأولية . ومن السهل جداً تصوير المسألة على هذا النحو بحيث تتحول القضايا الخمسة الأولية إلى تعريف لفظي لفصل معين من الثلاثيات ، وعندئذ لا تكون هناك أى لامعرفات أو لا مبرهنات فى نظريتنا التى أصبحت مجرد جزء من المنطق . ولكن الصفر والعدد والتالى تصبح متغيرات ما دام تحديدها مقتصر على أنها ثلاثى من فصل الثلاثيات ، وفضلاً عن ذلك تصبح النظرية الوجودية موضع شك ما دمتنا لا نستطيع أن نعرف أتوجد مثل هذه الثلاثيات على الإطلاق ، إلا إذا اكتشفنا على الأقل ثلاثياً واحداً بالفعل من هذا الفصل . ومع ذلك فإن ثلاثياً واحداً بالفعل يكون ثابتاً ، فنحتاج لطريقة نعطي بها قياً ثابتة للصفر والعدد والتالى . الذى نستطيع بيانه هو أنه إذا وجد مثل هذا الثلاثى الواحد ، فهناك عدد لا نهاية له منها . لأن حذف الحد الأول من أى فصل يحقق الشروط المطلوبة فيما يختص بالعدد ، يجعلنا نحصل دائماً على فصل يحقق مرة أخرى الشروط المذكورة . ويجب صياغة هذا القول بالفاظ مختلفة حتى لا ندور فى حلقة مفرغة ، ما دام معنى العدد لا يزال موضع نظر . وفضلاً عن ذلك فعلينا أن نتساءل : هل توجد بين جميع الأنظمة التى تحقق البديهيات الخمسة ، أى عملية تجريد ، كما يتصور بيانو ، ممكنة منطقياً ؟ إن كل حد فى فصل هو حد موجود ، وهو يحقق قضية ما تصبح باطلة حين نستبدل به حداً آخر فى الفصل . وعلى ذلك لا يوجد حد فى فصل له مجرد الخواص المعرفة للفصل دون غيره . أمّا ما يذهب إليه بيانو من علميته التجريدية فهو اعتبار الفصل وحلوده المتغيرة واستبعاد الحدود الثابتة . ذلك أن الحد المتغير فى الفصل له وحده الخواص التى بها يعرف الفصل . ويترتب على ذلك أن بيانو لم ينجح فى بيان أى معنى ثابت للصفر والعدد والتالى ، كما لم ينجح فى بيان إمكان أى معنى ثابت ما دامت النظرية الوجودية لم يبرهن عليها . فطريقته الوحيدة تنحصر فى قوله بأن معنى واحداً ثابتاً على الأقل

يمكن إدراكه مباشرة ، ولكن لا يمكن تعريفه . ومع أن هذه الطريقة ليست باطلة منطقياً إلا أنها مختلفة تماماً عن التجريد المستحيل الذي يقترحه . ثم إن البرهان على الاستقلال المتبادل لقضايا الخمسة إنما يكون ضرورياً لبيان أن تعريف فصل الثلاثيات والمحدد بتلك القضايا ليس زيادة فضل . وليس الإطناب خطأ منطقياً بل هو مجرد عيب فيها يمكن تسميته بالأسلوب . لقد كان غرضي فيما ذكرته عن الأعداد الأصلية أن أثبت عن طريق المنطق العام وجود معنى واحد ثابت يحقق القضايا الخمسة المذكورة ، وأن هذا المعنى الثابت يجب أن يسمى العدد ، أو الأول أن يسمى العدد الأصلي المتناهي . وبهذه الطريقة نتجنب بتاتاً إدخال لامعرفات ولا مبرهنات جديدة ، لأننا حين بينا أن فصل الثلاثيات المذكور له على الأقل حد واحد، وأنه قد استخدم في تعريف العدد فيسهل بعد ذلك بيان أن فصل الثلاثيات له عدد لا نهاية له من الحدود ، ونعرف الفصل ببساطة الخواص الخمسة المذكورة في القضايا الأصلية عند بيانو . لهذه النقطة أهمية قصوى في فهم العلاقة بين الرياضة والمنطق ، وستعرض مثل وهذه النقطة باستمرار خلال هذا الكتاب .

١٢٣ - ولكي أوضح الفرق بين طريقة بيانو وطريقي ، سأعيد تعريف الفصل الذي يحقق قضايا الخمسة الأصلية وتعريف العدد المتناهي والبرهان على قضايا الأصلية الخمسة في حالة الأخذ بالأعداد المتناهية .

إن فصل الفصول الذي يحقق بنسبته هو نفس فصل الفصول الذي يكون عنده الأصلي ١ . أي فصل الفصول الذي يكون طبقاً لنظريتي ١ . ، وتعريفه ببساطة كما يأتي : ١ . هو فصل فصول ١ الذي يكون ميدان علاقة الواحد بالواحد ع (علاقة حد بتاليه) بحيث يكون هناك حد واحد على الأقل لا يلي حداً آخر ، وكل حد يتوالى له تال ، ويكون ١ داخلاً في أي فصل س يشتمل على حد من ١ ليس له سابق ، ويشتمل أيضاً على التالي لكل حد من ١ يسمى ١ س . وهذا التعريف يشتمل على قضايا بيانو الخمسة ولا غير . وهكذا ففي جميع مثل هذه الفصول يمكن إثبات جميع القضايا العادية في الحساب الخاص

بالأعداد المنتهية ، فيمكن تعريف الجمع والضرب والكسور وغير ذلك ، ويمكن إجراء التحليل بأكمله بشرط ألا نتعرض للأعداد المركبة . ولكن في هذه العملية كلها يكون معنى الأشياء والعلاقات القائمة غير محدود إلى درجة ما ما دامت الأشياء والعلاقة التي بها نبدأ ، عبارة عن أفراد متغيرة لفصل معين . وفضلاً عن ذلك لا يتبين من هذه العملية كلها وجود مثل هذه الفصول التي يزعم التعريف القول بها .

وفي النظرية المنطقية للأعداد الأصلية نبدأ من الطرف المقابل ، فنعرف أولاً فصلاً معيناً من الأشياء ثم نبين أن هذا الفصل من الأشياء ينتمي للفصل ١ . الذي سبق تعريفه . ونحن نفعل ذلك كما يأتي :

(١) الصفر هو فصل الفصول الذي حده الوحيد هو الفصل الصفري .

(٢) العدد هو فصل جميع الفصول المشابهة لأي فصل منها .

(٣) الواحد هو فصل جميع الفصول التي ليست صفراً والتي تكون بحيث إذا كانت s تنتمي إلى الفصل فإن الفصل الذي يخلو من s هو الفصل الصفري ؛ أو بحيث إذا كان s ، s ينتميان إلى الفصل فإن s ، s متطابقان .

(٤) بعد بيان أنه إذا كان فصلان متشابهين ، وضم فصل من حد واحد إلى كل منهما ، فالمجموع متشابه ، وتعريف ذلك أنه إذا كان n عدداً ، كان $n + ١$ هو العدد الناتج من جمع وحدة للفصل n من الحدود .

(٥) الأعداد المنتهية هي تلك التي تنتمي لكل فصل s ينتمي إليه . والتي إليها تنتمي $n + ١$ إذا كانت n تنتمي إليها . وبهذا يكمل تعريف الأعداد المنتهية .

ثم بعد ذلك نحصل فيما يختص بالقضايا الخمسة التي يقرها بيان ما يأتي :

(١) الصفر عدد . (٢) إذا كان معنى $n + ١$ هو التالي لـ n ، وكان n عدداً كان $n + ١$ عدداً . (٣) إذا كان $n + ١ = m + ١$ ، فإن $n = m$. (٤) إذا كان n عدداً ما ، كان $n + ١$ مختلفاً عن ٠ (٥) إذا كان s فصلاً

ما وكان ٠ داخلًا في هذا الفصل ، وإذا كان m داخلًا فيه كان $m + 1$ داخلًا فيه ، فإن جميع الأعداد المتناهية تدخل فيه . وهكذا فإن جميع الخواص الأساسية يحققها فصل الأعداد المتناهية كما عرفنا من قبل . ويترب على ذلك أن فصل الفصول ١. له حدود ، وفصل العدد المتناهي هو أحد الحدود المحدودة من ١. وبناءً على ذلك لا يوجد من وجهة النظر الرياضية أى حاجة إلى لا معرفات أو لامبرهنتات جديدة فى كافة الحساب أو التحليل .

الباب الخامس عشر

جمع الحدود وجمع الفصول

١٢٤ - بعد أن عرضنا في إيجاز النظرية الرياضية للأعداد الأصلية ، علينا الآن أن نوجه النظر إلى المسائل الفلسفية التي تثيرها هذه النظرية . وسأبدأ ببعض الملاحظات الخاصة بالتمييز بين الفلسفة والرياضة ، ووظيفة الفلسفة في مثل موضوع أسس الرياضيات . وليس من الضروري أن نعتبر الملاحظات الآتية منطبقة على فروع الفلسفة الأخرى ما دامت هذه الملاحظات مستمدة بوجه خاص من النظر إلى مسائل المنطق .

التمييز بين الفلسفة والرياضة أمر يرجع بوجه عام إلى وجهة النظر : فالرياضة تركيبيّة وقياسية ، أما الفلسفة فلإنها نقدية ، وقد يقال إنها خلافية بمعنى غير شخصي . فكلما كنا بإزاء استدلال قياسي كنا بصدد الرياضة ؛ غير أن مبادئ الاستدلال القياسي ، والتعرف على الأمور التي لا تقبل التعريف ، والتمييز بين مثل تلك الأمور ، كل ذلك من عمل الفلسفة ، التي هي في الواقع مسألة بصيرة وبصر في أساسها ، فالأشياء التي تدرك بما نسميها الحواس كالألوان والأصوات لا تعتبر عادة لبعض الأسباب داخلية في نطاق الفلسفة إلا فيما يختص بما بينها من علاقات أكثر تجريداً ، ولو أنه يبدو من المشكوك فيه التمسك بمثل هذا الاستثناء . مهما يكن من شيء فلما كان هذا الكتاب غير مختص أساساً بالأشياء المحسوسة ، ففي استطاعتنا قصر ملاحظتنا على الأشياء التي لا تعد موجودة في الزمان والمكان . وإذا كان لنا أن نعرف شيئاً عن مثل هذه الأمور فينبغي أن ندركها على نحو ما إدراكاً محسوساً ، وينبغي أن نميز بعضها عن بعضها الآخر ، كما يجب كذلك إدراك بعض علاقاتها إدراكاً مباشراً . ذلك أن مجموعة من اللامعرفات والقضايا اللامبرهنتات يجب أن تكون نقطة البداية لأي استدلال

رياضي ، وهذه البداية هي التي تعنى الفيلسوف . وعند ما يكمل عمل الفيلسوف تماماً يمكن أن تندمج نتائج هذا العمل في المقدمات التي يتركز عليها الاستدلال . ويترب على طبيعة هذا البحث نفسه أن النتائج قد تنقض ولكن لا يمكن إثباتها أبداً . ويقوم النقض على إبراز ما يوجد من متناقضات وعدم اتساق ، ولكن غياب هذه المتناقضات وعدم الاتساق لا يرتفع إلى مقام البرهان . وبذلك يستمد كل شيء في نهاية الأمر على الإدراك المباشر المحسوس ، وتقوم الحجة الفلسفية بوجه الدقة على دفع القارئ إلى إدراك ما أدركه المؤلف من قبل . صفوة القول ليست الحجة من طبيعة البرهان بل من طبيعة الدفاع . وبذلك يكون السؤال في هذا الباب هو ما يأتي : أتوجد ثمة أى مجموعة من الأشياء اللامعروفة التي تسمى عادة أعداداً تختلف عن مجموعة الأشياء المعروفة سابقاً ؟ هذا سؤال فلسفي في أساسه الفصل فيه بالفحص أولى منه بالاستدلال المتسلسل الدقيق .

١٢٥ — سنفحص في هذا الباب عن هذه المسألة وهي : هل التعريف المذكور آنفاً عن الأعداد الأصلية يفترض مقدماً بأى حال معاني للعدد أكثر أساسية . وهناك طرق عدة تجعلنا نفترض أن الأمر كما ذكرنا . فأول كل شيء الأفراد التي تؤلف الفصول يبدو أن كلا منها من بعض الوجوه « واحد » ، وقد يظن أن علاقة الواحد بالواحد لا يمكن أن تعرف دون إدخال العدد ١ . ومن جهة أخرى قد نتساءل أي يمكن التمييز بين فصل ذي حد واحد وبين هذا الحد الواحد . ومن جهة ثالثة قد يقال إن معنى « الفصل » يفترض العدد ، بمعنى يختلف عن ذلك المرف سابقاً : فقد يقال إن الفصول تنشأ من جمع الأفراد كما تشير إلى ذلك لفظة « الواو » ، وأن الجمع المنطقي للفصول تابع لهذا الجمع للأفراد . وتحتاج هذه الأسئلة إلى بحث جديد في معنى « الواحد » و« الفصل » وإلى لأرجو أن تعيننا هنا النظريات التي بسطناها في الجزء الأول .

أما فيما يتعلق بأن أى فرد أو أى حد فهو من بعض الوجوه « واحد » فلا ريب أن هذا أمر غير منكور ، ولكن لا يترتب على ذلك أن معنى « الواحد » مفروض عند ما نتكلم عن الأفراد ، بل لعله على العكس معنى (٢)

الحد أو الفرد هو المعنى الأساسى الذى يشتق منه معنى « الواحد » . وقد أخذنا بهذه الوجهة من النظر فى الجزء الأول ، ولا يبدو أن ثمة أى سبب لاستبعادها . أما علاقات الواحد بالواحد فلأنها معرفة بواسطة التطابق دون أى ذكر « للواحد » ، وذلك كما يأتى : ع علاقة واحد بواحد إذا كانت ص ، ص لهما العلاقة ع ب ص ، وكانت ص لها العلاقة ع ل ص ، ص ، فإن ص ، ص متطابقان وكذلك ص ، ص . حقاً هنا نجد أن ص ، ص ، ص ، ص ، ص كل منها حد « واحد » ، ولكن ذلك (فيما يبدو) غير مفروض فى التعريف . وبهذا نحل أول الاعتراضات المذكورة سابقاً (مع الاحتفاظ ببحث جديد فى طبيعة الفصول)

والسؤال الثانى يتصل بالتمييز بين الفصل الذى يشتمل على حد واحد وبين الحد الواحد الذى يشتمل عليه . ولو أمكننا أن نطابق بين الفصل وبين محموله المعروف أو فصل تصوره فلا صعوبة تنشأ من هذه النقطة . فحين يتعلق محمول معين بحد واحد ليس غير ، فن الواضح أن ذلك الحد ليس متطابقاً بالمحمول المذكور . ولكن إذا تعلق محمولان بحدين بالذات ، فلنا أن نقول : إنه ولو أن المحمولين مختلفان فالفصلان اللذان يعرفانهما متطابقان ، أى ليس هناك إلا فصل واحد يعرفهما معاً . مثال ذلك : لو كان جميع عراة الريش الماشين على قدمين ناس ، وكان جميع الناس عراة الريش ماشين على قدمين ، فالفصلان « الناس » ، و « عارى الريش » . ماش على قدمين « متطابقان ، على الرغم من أن الإنسان يختلف عن عارى الريش يمشى على قدمين . وهذا يبين أن الفصل لا يمكن أن يتطابق مع فصل تصوره أو محموله المعروف . فقد يبدو أنه ليس أمامنا إلا الحدود الفعلية بحيث إذا لم يكن هناك إلا حد واحد كان ذلك الحد متطابقاً مع الفصل . ومع ذلك فهذه الوجهة من النظر لا يمكن لأسباب كثيرة صورية أن تعطى معنى الرموز المقابلة للفصول فى المنطق الرمزى . مثال ذلك : خذ فصل الأعداد التى حين تجمع على ٣ تعطى ٥ ، فهذا فصل لا يشتمل على حدود سوى العدد ٢ ، ولكن يمكننا أن نقول إن ٢ حد لهذا الفصل ، أى له بالفصل تلك العلاقة الخاصة التى لا تقبل التعريف والتى توجد بين الحدود

وبين الفصول التي تشتمل عليها . ويبدو أن هذا يدل على أن الفصل مختلف عن الحد الواحد . وهذه النقطة في غاية الأهمية في منطق « بيانو » الرمزي وترتبط بتمييزه بين علاقة الفرد بفصله وعلاقة الفصل بالفصل الآخر الذي يشملها . وهكذا فإن فصل الأعداد التي عند ما تجمع على ٣ تعطى ٥ داخل في فصل الأعداد ولكنه ليس عدداً ، على حين أن ٢ عدد ، ولكنه ليس فصلاً داخلاً في فصل الأعداد . وإذا طابقتنا بين العلاقتين اللتين يميز « بيانو » بينهما لكان ذلك سبباً في هدم نظرية اللانهاية ، والإخلال بالدقة الصورية لكثير من الأدلة والتعاريف . ويبدو في الواقع مما لا ريب فيه أن تمييز « بيانو » في محله ، وبقى أن نبحث عن طريقة مآ للتمييز بين الحد وبين الفصل الذي يشتمل على ذلك الحد ولا غير .

١٢٦- ولكي فحسم القول في هذه النقطة يجب الانتقال إلى الصعوبة الثالثة فنعيد النظر في معنى « الفصل » نفسه . ويظهر أن هذا المعنى مرتبط بمعنى « الدلالة » : الذي شرحناه في الجزء الأول الباب الخامس ، حيث أشرنا إلى طرق خسة للدلالة : إحداها التي سميناها « العطف العددي » وهو النوع المعبر عنه بلفظة « جميع » . وهذا النوع من العطف يظهر أنه هو الداخل في حالة الفصول . مثال ذلك : إذا كان « الإنسان » هو فصل التصور فإن « جميع الناس » هو الفصل ، ولكن ليس « جميع الناس » من حيث إنه تصور هو الذي سيكون الفصل ، بل ما يدل عليه هذا التصور ، أي الحدود الممثلة لمجموعة هذا الاجتماع الخاص بلفظة « جميع » . وطريقة اجتماعها أساسية ما دام « أي إنسان » أو « بعض الناس » من الواضح أنه ليس الفصل ، ولو أن كلا منهما يدل على اجتماع للحدود ذاتها . وقد يبدو أنه إذا طابقتنا بين الفصل وبين العطف العددي لحدوده فيجب أن ننكر التمييز بين الحد وبين الفصل الذي حده الوحيد هو ذلك الحد . ولكننا قد تبين لنا في الباب العاشر أن الفصل يجب أن يكون دائماً شيئاً مختلفاً في نمطه المنطقي عن حدوده ، وأنه لكي نتجنب هذه القضية س٤ س٥ ، يجب أن يمتد هذا المذهب ليشمل حتى الفصول التي ليس لها إلا حد واحد .

وليس في استطاعتي أن أقرر إلى أي حد يمتنا هذا من المطابقة بين الفصول وبين العطف العددي، وعلى أي حال لا بد من التمييز بين الحد وبين الفصل الذي حده الوحيد هذا الحد. ومع ذلك فلا بد من أخذ الفصول من ناحية الماصدق إلى الدرجة التي تتدخل فيها هذه الماصدقات وتجعلها محددة حين تعطي حدودها. ويسمى «فريج» مثل هذه الفصول Werthverläufe، وعلينا أن نعتبر الأعداد الأصلية كفصول بهذا المعنى.

١٢٧ — بقيت بعد ذلك صعوبة لا تزال قائمة وهي : يبدو أن الفصل ليس حدوداً كثيرة، بل إنما هو نفسه حد وحيد، حتى حين يكون هناك حدود كثيرة في الفصل. ويبدو أن هذه الصعوبة تدل على أن الفصل لا يمكن أن يتطابق مع جميع حدوده، بل الأولى أن يعد كالكل الذي يتألف منه. ومع ذلك فلنرى نقرر الصعوبة بطريقة لا اعتراض عليها يجب أن نستبعد الوحدة والكثرة من تقريرها ما دمنا نعرف هاتين الفكرتين بواسطة معنى الفصل. ويحسن بنا أن نوضح نقطة قد تستوقف نظر القارئ. هل فكرة «الواحد one» مفروضة كلما تكلمنا عن «أحد a term»؟ قد يقال إن «حداً ما a term»^(١) يعني حداً واحداً، وبذلك لا يمكن أن نصوصغ عبارة عن حد دون افتراض أنه «الواحد». وهذه القضية لا نزاع فيها فيما يختص ببعض معاني «الواحد». فكل ما هو موجود فهو واحد، فالموجود والواحد، كما لاحظ «ليبنتر»، حدان ينعكسان^(٢). ومن العسير أن نتأكد إلى أي حد تكون هذه العبارات مجرد عبارات نحوية، لأنه إن صح أن كل ما هو موجود فهو واحد، فكذلك كل ما هي موجودات، فهي كثيرة. ولكن الحقيقة تبدو في أن نوع الشيء الذي هو فعل، أي نوع الشيء الذي ندل عليه بقولنا: «جميع الناس» أو بأي تصور لفصل، ليس «واحداً» إلا حيث يكون للفصل

(١) فيه التنازل إلى الصعوبة فنقل هنا الاصطلاح على وجه الدقة إلى اللغة العربية وهو term "a" ولهذا السبب وضعنا الأصل الذي يقابله (المترجم)

Ed. Gerhardt, II, p. 300 (٢)

حد واحد فقط ، ولا يجب أن يجعل موضوعاً منطبقاً واحداً . هناك كما قلنا في الجزء الأول الباب السادس في الأحوال البسيطة حد وحيد مترابط هو الفصل ككل ، ولكن هذه الحالة قد لا تحصل في بعض الأحيان ، وهي على كل حال ليست متطابقة مع الفصل ككثير . ولكن في هذه النظرية لا يوجد تناقض كما هي الحال في نظرية أن الأفعال والصفات لا يمكن أن تجعل موضوعات . ذلك أنه يمكن أن نحكم أحكاماً على الفصول ككثير ، ولكن موضوع هذه الأحكام كثير وليس واحداً فقط كما هي الحال في الأحكام الأخرى . خذ مثلاً : « محمد وعلى اثنان من خطاب الآتية ليلى » فهذا حكم يدور حول الفصل « محمد وعلى » ، ولكن لا على هذا الفصل باعتبار أنه حد واحد . وهكذا فإن « الواحدية one-ness » تتعلق في هذه النظرية بنمط معين من الموضوعات المنطقية ، ولكن الفصول التي ليست واحدة قد يتناول عليها مع ذلك أحكام . ونخلص من ذلك أن الواحدية لازمة ولكنها ليست مفروضة في القرارات التي تدور حول حد ، على أن نعتبر الحد بما لا يقبل التعريف .

١٢٨ - ومع ذلك يبدو من الضروري أن ندخل تمييزاً فيما يتصل باستخدام « الواحد » . فالمعنى الذي يكون بمقتضاه كل شيء « واحداً » ، وهو ما يدل على قولنا عن شيء ما « an object » ، هو كما ينسحب إليه « فريج^(١) » من المعاني المبهمة جداً ، من حيث انطباقه على كل شيء على حد سواء . أما المعنى الذي يقال عن الفصل إنه يشتمل على حد واحد فهو معنى دقيق تماماً . فالفصل لا يمكن له حد واحد حين لا يكون شيئاً صغيراً ، وقولنا : « س » ، ص ياءات » يستلزم أن « س » متطابق مع « ص » . هنا نجد أن الواحدية خاصة للفصل الذي يمكن أن يسمى عندئذ بفصل الوحدة unit-class . ويمكن أن يكون ألس الذي هو حده الوحيد فصلاً له حدود كثيرة ، مما يدل على أن معنى « الواحد » الداخلى فى قولنا « حد واحد » أو « حد ما » ليس صحيحاً فى الحساب ، إذ أن كثيراً من الحدود من حيث هي كذلك ، قد تكون حداً منفرداً لفصل فصول . فالواحد

لا يجب أن يقال على حدود ، بل على فصول لها حد واحد بالمعنى المذكور آنفاً ؛ مثال ذلك «ى واحد» أو الأفضل قولنا «ى وحدة» يعنى : «ى ليس صفراً» و «س» ، «ص» ياعان « يستلزم أن «س» ، «ص» متطابقان . وفى هذه الحالة يكون عدد «ى إما لا شىء ، أو واحداً ، أو كثيراً إذا كان «ى فصل فصول ، ولكن إذا كان «ى فصل حدود ، فإن عدد «ى لن يكون لا شىء ولا واحداً ولا كثيراً ، بل بكل بساطة حداً مآ .

١٢٩ - إن النظرية السائدة التى وصلت إلينا فيما يختص بالأعداد المتناهية ، هى أنها نتيجة العد ، أو كما يؤثر بعض الفلاسفة فى قولهم إنها نتيجة التركيب . وما يؤسف له أن الذين ينهبون إلى هذه النظرية لم يحلوا فكرة العد ، فلو أنهم فعلوا ذلك لرأوا أنها فى غاية التعقيد ، وأنها تفترض من قبل الأعداد ذاتها التى يفترضون توليدها .

ولا ريب أن لعملية العد مظهراً نفسانياً ، غير أن هذا المظهر بعيد تماماً عن نظرية الحساب . والذى أريد بيانه الآن هو العملية المنطقية الداخلة فى فصل العد ، وهى كما يأتى : حين نقول : واحد ، اثنين ، ثلاثة ، إلخ ، فنحن نعتبر بالضرورة علاقة واحد بواحد تقوم بين الأعداد المستخلصة فى العد وبين الأشياء المملودة . فالذى نعنيه بقولنا : «واحد ، اثنين ، ثلاثة» هو أن الأشياء المشار إليها بهذه الأعداد هى نظائرها بالنسبة إلى العلاقة الموجودة فى أذهاننا . (وبهذه المناسبة نقول إن هذه العلاقة شديدة التعقيد عادة ، وهى عرضة للتأثر بحالتها العقلية فى وقت العد) . وهكذا نحن نربط بين فصل من الأشياء وبين فصل من الأعداد ، ويشتمل فصل الأعداد على جميع الأعداد من ١ إلى عدد مآ هو «هـ» والاستدلال المباشر الوحيد الذى يستنتج من هذا الارتباط هو أن عدد الأشياء هو نفس عدد الأعداد من ١ إلى «هـ» . ثم نحتاج إلى عملية أخرى لبيان أن عدد الأعداد هو «هـ» إنما يكون صحيحاً فى الواقع حين تكون «هـ» متناهية ، أو بمعنى آخر أوسع . حين تكون «هـ» ١ . (أى أقل الأعداد اللامتناهية) . فضلاً عن ذلك فإن عملية العد لا تعطينا أى إشارة إلى الأعداد

ما هي ، ولماذا تكون سلسلة ، وكيف نبرهن على وجوده من الأعداد ، من ١ إلى ∞ (هذه البرهنة في الأحوال التي تكون فيها صحيحة) . من أجل ذلك كان العد غير داخل في أساس الحساب ، ولهذا يمكن أن نستبعده حتى نبعث الترتيب والأعداد الترتيبية .

١٣٠ - ولنرجع إلى فكرة العطف العددي . فمن الواضح أن الأشياء مثل « ا و ب » ، « ا و ب و ح » هي التي استوجبت الحكم عليها بأعداد غير الواحد . وقد فحصنا أمر هذه الأشياء في الجزء الأول بصدد علاقتها بالفصول فرأينا أنها متطابقة . وعلينا الآن أن نفحص عن علاقتها بالأعداد والكثرة .

والفكرة التي علينا الآن الفحص عنها هي فكرة العطف العددي ، أو بالاختصار « المجموعة Collection » . ولنبدأ بقولنا إن هذه الفكرة لا يجب أن تكون مطابقة لفكرة الفصل ، بل يجب أن نبعث عنها بحثاً جديداً مستقلاً ، وأعني بالمجموعة ما يحمله قولنا : « ا و ب » أو « ا و ب و ح » أو أي سرد آخر لحدود معينة . وتعرف المجموعة بذكر الحدود بالفعل ، وترتبط الحدود بلفظة « الواو » . وقد يبدو أن « الواو » تمثل طريقة أساسية لربط الحدود ، بحيث نذهب إلى أن هذه الطريقة للربط بالذات جوهرية إذا شئنا الحصول على نتيجة من الحكم بالأعداد غير الواحد . والمجموعات لا تفترض الأعداد ما دامت تنتج عن مجرد جمع الحدود « بالواو » ، وإنما تفترض الأعداد في حالة خاصة تكون حدود المجموعة نفسها أعداداً مفروضة . وثمة صعوبة نحوية لا بد من الإشارة إليها وتفسيرها ما دامت ليس هناك طريقة لتجنبها . فالمجموعة نحوياً شيء واحد ، على حين أن ا و ب ، أو ا و ب و ح كثيرون أساسياً . إن المعنى الدقيق للمجموعة هو الكل المركب من كثيرين ، ولكن ما دمنا في حاجة إلى لفظة تدل على الكثيرين أنفسهم فإننا نؤثر استخدام لفظة « المجموعة » في هذا المعنى بحيث تكون المجموعة ، طبقاً لهذا الاستعمال الذي نأخذ به هنا ، هي الكثير لا الواحد . أما فيما يخص بالمقصود من الربط المعين بالواو ، فهذا الربط يعطى ما سبق أن سميناه بالعطف العددي . فإن ا و ب هما ما يدل عليهما تصور فصل

ا و ب هما حداه الوحيدان ، ويدل عليهما بالطريقة المشار إليها بلفظة «جميع» . ويمكن أن نقول : إذا كانت γ فصل التصور المناظر لفصل α ، ب حداه الوحيدان ، فإن «جميع الباءات» عبارة عن تصور يدل على الحدين α ، ب مجتمعين بطريقة معينة ، و ا و ب هما ذلك الحدان المجتمعان بتلك الطريقة ذاتها، وهكذا يظهر أن α و ب لا يتميزان عن الفصل ، ولو أنهما متميزان عن فصل التصور وتصور الفصل . وبناء على ذلك إذا كان γ فصلاً له أكثر من حد واحد ، فقد يبدو من الضروري ألا يكون γ واحداً بل كثيراً، ما دام γ متميزاً عن كل من فصل التصور وعن الكل المركب من حدود γ ^(١) . وهكذا نرجع إلى اعتماد الأعداد على الفصول . وحيث لا يقال إن الفصول المذكورة متناهية ، فن الضروري عملياً أن نبدأ بفصول التصورات ونظرية الدلالة لا بنظرية «الواو» التي بسطناها الآن . ونظرية «الواو» إنما تنطبق عملياً على الأعداد المنتهية ، وتعطى لهذه الأعداد مركزاً يختلف ، على الأقل من الناحية النفسية ، عن الأعداد غير المنتهية . صفوة القول توجد طريقتان لتحريف الفصول المنتهية الخاصة ، ولكن لا يوجد إلا طريقة واحدة لعملية لتحريف الفصول غير المنتهية الخاصة ، أى بالمفهوم . ومن المؤلف عادة اعتبار الفصول أساساً من جهة الماصدق ، مما وقف حتى الآن حجر عثرة في طريق أى نظرية منطقية صحيحة للأنهية .

١٣١- ولا بد من ملاحظة أن الجمع ليس في الأصل طريقة لتكوين الأعداد ، بل لتكوين الفصول أو المجموعات . فلو جمعنا ب إلى α فلن نحصل على العدد ٢ ، بل نحصل على α و ب ، أى مجموعة من حدين ، أو زوج . ويعرف الزوج كما يأتي : γ زوج إذا كان γ له حدود ، وإذا كان γ حداً لـ α ، وكان هناك حد لـ α يختلف عن γ . ولكن إذا كان γ ، γ

(١) هناك سبب هام يمارض تطابق الفصل مع الكل المركب من حدوده ، وهو أن أحد هذه الحدود قد يكون الفصل نفسه كما في حالة : «الفصل هو الفصل» أو «الفصول إحدى الفصول» . والمفراز المنطقي لفصل الفصل أنه ذو ترتيب لا نهاية له ، ولذلك لا ينطبق الاعتراض السابق وهو «س ع س» على هذه الحالة .

حدين مختلفين $أ$ و $ب$ ، وكل ه مختلف عن $ص$ ، $ص$ ، فإن كل فصل يشتمل على ه مختلف عن $ص$. وفي هذا التعريف لم يرد إلا الاختلاف مع الفصل ذي الحدود . وقد بعترض ولا شك أننا يجب أن نأخذ حدين فقط هما $ص$ ، $ص$ في التعريف المذكور ، ولكن الواقع أن أي عدد متناه يمكن تعريفه بالاستقراء دون إدخال أكثر من حد واحد . لأنه إذا عرفنا ه ، فإن الفصل $ص$ له ه + ١ من الحدود ، عند ما تكون عدد حدود $ص$ المختلفة عن $ص$ موجودة في ه ، إذا كان $ص$ حداً من حدود $ص$. ونحصل على معنى حاصل الجمع الحسابي ه + ١ من حاصل الجمع المنطقي لفصل له ه من الحدود ، وفصل له حد واحد . فحين نقول $١ + ١ = ٢$ ، ليس ممكناً أن نعني ١ و ١ ، إذ إنما يوجد ١ فقط . فإذا أخذنا ١ على أنه فرد ، كان ١ و ١ لا معنى له ، على حين إذا أخذناه على أنه فصل انطبقت عليه قاعدة المنطق الرمزي وهي أن ١ و ١ هو ١ . وهكذا في القضية المنطقية المناظرة ، عندنا من جهة حدود يمكن أن نحكم فيها على ١ ، ومن جهة أخرى عندنا زوج . وبيان ذلك أن $١ + ١ = ٢$ يعني : « حد واحد وحد واحد هما حدان » أو إذا عبرنا عن القضية في صيغة المتغيرات : « إذا كان $ص$ له حد واحد ، وب له حد واحد ، وكان $ص$ مختلفاً عن $ب$ ، فحاصل جمعهما المنطقي له حدان » . ويجب ملاحظة أننا من جهة عندنا عطف عددي للقضايا ، ومن الجهة الأخرى عندنا قضية تتعلق بالعطف العددي للحدود . ولكن المقدمة الصحيحة في القضية المذكورة ليس عطف القضايا الثلاثة بل حاصل ضربهما المنطقي . ومع ذلك فليس لهذه النقطة إلا أهمية بسيطة في موضوعنا .

١٣٢ - لا تبقى إذن إلا هذه النقطة وهي : هل معنى الحد يفترض معنى ؟
 فقد رأينا أن جميع الأعداد خلا الصفر تتطلب في تعريفها معنى حد ما فإذا كان هذا المعنى يتطلب بدوره معنى ١ ، أصبح معنى ١ دائرياً ، فلا بد أن نسلم بأن يكون ١ مما لا يقبل التعريف . وقد أجبتنا عن هذا الاعتراض الموجه لعمليتنا بالمذهب المبسوط في « بند ١٢٨ » ، وبيانه أن حداً ما ليس واحداً بالمعنى الداخلى في الحساب ، أو بالمعنى المقابل « للكثير » . حقاً معنى « أى حد » هو

من اللامعرفات المنطقية المفروضة في الحقيقة الصورية وفي نظرية المتغير بأكملها ؛ ولكن معنى أى حد يختص بالعطف المتغير للحدود ، والتي لا يدخل فيها العدد ١ بأي حال . فلا يوجد إذن أى دور في تعريف العدد ١ بواسطة معنى حد ما $a \text{ term}$ أو أى حد $any \text{ term}$

الخلاصة : الأعداد فصول فصول ، أى فصول جميع الفصول المشابهة لفصل معطى . وهنا يجب أن تفهم الحدود على معنى العطف العددي في حالة الفصول ذات الحدود الكثيرة . ولكن قد لا يكون للفصل حدود ، كما أن الفصل ذا الحد الواحد يكون متميزاً عن هذا الحد ، ولذلك فالفصل ليس مجرد حاصل جمع حدوده . والفصول وحدها لها أعداد . وليس صحيحاً أن يقال عما يسمى عادة بشيء واحد إنه واحد ، على الأقل على المعنى المطلوب ، كما يظهر من أن الشيء قد يكون فصلاً له حدود كثيرة . ويبدو أن قولنا « شيء واحد » إنما يعنى فقط « موضوعاً منطقياً في قضية ما » . ولا يجب أن تعتبر الأعداد المتناهية متولدة عن العد الذي على العكس هو الذي يفترضها . والجمع هو في الأصل جمع منطقي ، أولاً للقضايا ، ثم للفصول التي يشتق منها الجمع في الحساب فيما بعد . ويتوقف تقرير الأعداد على أن الفصل الذي له حدود كثيرة يمكن أن يكون موضوعاً منطقياً دون أن يكون واحداً حسابياً . وهكذا يتضح عدم وجود برهان فلسفي ، يستطيع إبطال النظرية الرياضية الخاصة بالأعداد الأصلية ، كما يبتناها في الأبواب من الحادى عشر إلى الرابع عشر .

الباب السادس عشر

الكل والجزء

١٣٣ - من الضروري لفهم التحليل أن نفحص عن معنى الكل والجزء ، وهو معنى انتشح بالغموض - ولو أن ذلك بسبب كثير أو قليل من الأسباب المنطقية الوجهية- بسبب الكتاب الذين يمكن تسميتهم بوجه الإجمال بالمجيبين. وسأبذل جهدي في هذا الباب أن أعرض نظرية مستقيمة لا غموض فيها عن هذا الموضوع ، صارفاً النظر عن المجادلات ما أمكن إلى ذلك سيلا . وأود أن أشير في بداية هذا البحث أنني سأستخدم لفظ « الكل » بمعنى مترابط بوجه الدقة مع « الجزء » ، بحيث لا يسمى شيء كلاً إلا إذا كان له أجزاء . وعلى ذلك لن نسمي الحدود البسيطة كالنقط ، واللحظات ، والألوان ، أو التصورات الأساسية في المنطق ، كلات .

والحدود التي ليست بفصول قد تكون كما رأينا في الباب السابق على نوعين : الأول منها هي البسيطة التي يمكن أن تتميز ، ولو أنها لا تعرف ، بأن القضايا التي تحكم على وجود مثل هذه الحدود ليس لها مفروضات *presuppositions* . والنوع الثاني من الحدود التي ليست بفصول هي المركبة ، وفي هذه الحالة يفترض وجودها وجود حدود أخرى معينة . وكل ما ليس فصلاً يسمى « وحدة » *unit* ، وبذلك تكون الوحدات إما بسيطة أو مركبة . والوحدة المركبة « كل » ، وأجزاؤها وحدات أخرى - بسيطة كانت أم مركبة - مفروضة فيها . وهذا يوحي بإمكان تعريف الكل والجزء بواسطة التقدم المنطقي ، وهذا اقترح ولو أنه يجب استبعاده في النهاية إلا أنه من الضروري بحثه في أطناب .

١٣٤ - حيث يكون ثمة لزوم صوري من جهة واحدة فقد نذهب إلى أنه إذا أمكن الحصول على دالتى القضيتين الواحدة من الأخرى بتغيير جزء

واحد فقط ، فإن اللازم أبسط مما يلزم عنه . مثال ذلك : «سقراط إنسان» يلزم عنه أن «سقراط فان» ، ولكن القضية الثانية لا تستلزم الأولى . وكذلك فإن القضية الثانية أبسط من الأولى من حيث إن «الإنسان» تصور «الفانى» جزء منه . ثم إذا أخذنا قضية تحكم بعلاقة بين شيئين أ و ب ، فإن هذه القضية تستلزم وجود أ ، وجود ب ، وجود العلاقة ، ولا شيء من هنا يستلزم القضية وكل منها أبسط من القضية . وإنما يكون هناك مساواة فى التركيب طبقاً للنظرية القائلة بأن المفهوم والمصدق يتغيران تغيراً عكسياً الواحد بالنسبة للآخر - فى حالات اللزوم المتبادل ، مثل «أ أكبر من ب» و «ب أصغر من أ» . ولعل هذا يغرينا بوضع التعريف الآتى : يقال إن أ جزء من ب حين تكون ب موجودة فتستلزم وجود أ ولكن وجود أ لا يستلزم وجود ب . فلذا أمكن التسليم بهذا التعريف ، فلن يكون الكل والجزء لامعرفين جديدين ، بل يشقان من التقدم المنطقي Priority . ومع ذلك فهناك من الأسباب ما يدعو إلى تهافت هذا الرأى .

والاعتراض الأول هو أن التلزم المنطقي ليس علاقة بسيطة . حقاً اللزوم بسيط ، ولكن التلزم المنطقي لا على ب لا يحتاج إلى أن تكون «ب يلزم عنها أ» فقط ، بل أيضاً «أ لا يلزم عنها ب» (وللتيسير سأقول إن أ يلزم عنها ب حين توجد أ فيلزم عنها وجود ب). من الصحيح أن هذا الأمر يتحقق حين يكون أ جزءاً من ب ، ولكن يبدو من الضروري أن نعتبر علاقة الكل بالجزء كشيء بسيط لا بد أن يكون مختلفاً عن أي علاقة ممكنة لكل مع كل آخر ليس جزءاً منه . ولا ينتج ذلك من التعريف المذكور . خذ مثلاً : «أ أكبر وأحسن من ب» يلزم عنها أن «ب أصغر من أ» ، ولكن عكس اللزوم ليس صحيحاً : ومع ذلك فإن القضية الثانية ليست جزءاً من الأولى .

واعتراض آخر مستمد من أحوال كالحمرة واللون . فقد يبدو أن هذين التصورين متساويان فى البساطة : فلا تخصيص سوى الحمرة نفسها وأبسط منها يمكن أن تضاف إلى اللون، لتحديث الحمرة ، بالطريقة التى يضاف بها هذا التخصيص وهو «فان» فيجعل «الإنسان» إنساناً . وعلى ذلك فقولنا :

«أحمر» ليس بأكثر تركيباً من قولنا «أملون»، ولو أن هنا لزوماً من جهة واحدة . الواقع يظهر أن الحمرة تصور بسيط (إذا أخذت على معنى لون واحد معين) الذى وإن كان يستلزم اللون إلا أنه لا يحتوى على اللون كككون من مكوناته . لذلك نرى أن العلاقة العكسية بين الماصدق والمفهوم لا تصح فى جميع الأحوال . ولهذا الأسباب ينبغى أن نستبعد محاولة تعريف الكل والجزء على الرغم من صلتها الوثيقة بواسطة الزوم .

١٣٥ - بعد أن فشلنا فى تعريف الكلات بالتقدم المنطقى ، فلا أحسب فى استطاعتنا تعريفها أصلاً . فقد يبدو أن علاقة الكل بالجزء علاقة أولية لا تقبل التعريف ، أو قل إنها عدة علاقات مختلطة فى الغالب وإحداها على الأقل لا تقبل التعريف . وعليها مناقشة علاقة الجزء بالكل مناقشة تختلف باختلاف طبيعة كل من الكل والأجزاء . ولنشرع يبحث أبسط الحالات ثم نرتفع شيئاً فشيئاً إلى الأكثر تعقيداً .

(١) كلما كان عندنا مجموعة مآ ذات حدود كثيرة بالمعنى الذى شرحناه فى الباب السابق ، فإن تلك الحدود تكون معاً كلاً ، بشرط وجود دالة قضية غير تربيعية تحققها جميع تلك الحدود . وقد اعتبرنا فى الباب السابق الفصل مكوناً من جميع الحدود ، ولكن يبدو أن الاستعمال لا يشير إلى أى سبب من أجله لا يعتبر الفصل كذلك مكوناً من الكل المركب من جميع الحدود فى الأحوال التى يوجد فيها مثل ذلك الكل . وأولى تلك الأحوال الفصل ككثير ، والثانية الفصل كواحد ، وفى هاتين الحالتين كل حد له إلى الكل علاقة معينة لا تقبل التعريف^(١) ، وهى من جملة معانى الكل والجزء . فالكل فى هذه الحالة ، هو كل من نوع خاص سأميحه الجملة aggregate وتختلف الجملة عن الكلات من الأنواع الأخرى بأنها تكون معينة طالما عرفت مكوناتها .

(١) وقد تؤخذ إذا شئت كما يلعب بيانو بهذا الرمز ع . والاعتراض على معنى ع هو أنه ليس كل دالة قضية تعرف كلا من النوع المطلوب . فالكل يختلف عن الفصل بكثير بأنه من نفس الطراز كطوده .

(٢) ولكن العلاقة السابقة إنما تقوم بين الجملة والحدود الوحيدة للمجموعة التي تكون الجملة ، فالعلاقة بين هذه الجملة وبين الجمل المشتملة على بعض دون جميع حدود هذه الجملة هي علاقة مختلفة ، ولو أنها أيضاً يمكن أن تسمى عادةً علاقة الجزء بالكل . مثال ذلك علاقة الأمة اليونانية بالجنس البشرى فإنها مختلفة عن علاقة سقراط بالجنس البشرى . وعلاقة كل الأعداء الأولية بكل الأعداد مختلفة عن علاقة العدد ٢ بكل الأعداد . ويرجع هذا التمييز الهام إلى بيان^(١) . ويمكن تعريف علاقة الجملة التابعة لجملة أخرى تشتمل عليها ، كما شرحنا في المجلد الأول ، بواسطة الزوم والنوع الأول من علاقة الجزء بالكل . فإذا كان y ، هـ جملتين ، وكان لكل قيمة من قيم x «س هي y » يلزم عنها «س هي هـ» إذن y جزء خاص (بالمعنى الثاني) من هـ ، بشرط عدم قيام عكس الزوم . فهذا المعنى للكل والجزء من المعاني المشتقة والمعركة .

(٣) ولكن هناك نوع آخر من الكل يمكن أن يسمى «الوحدة unity» ومثل هذا الكل يكون دائماً قضية ، ولو أنه ليس من الضروري أن تكون قضية محكوماً بها «حملية» asserted . مثال ذلك : «ا يختلف عن ب» أو «اختلاف ا عن ب» عبارة عن مركب أجزاء هي ا ، ب ، الاختلاف . ولكن هذا المعنى الخاص بالكل والجزء يختلف عن المعاني السابقة ما دامت «ا يختلف عن ب» ليست جملة ، وليس لها أجزاء على الإطلاق بمقتضى المعنيين الأولين . والأجزاء بهذا المعنى الثالث هي المعتبرة بوجه خاص من الفلاسفة ، على حين يدخل المعنيان الأولان في المنطق الرمزي والرياضيات . وهذا المعنى الثالث «للجزء» هو المعنى الذي يناظر correspond التحليل ، ويبدو أنه مما لا يقبل التعريف كالمعنى الأول ، أعني أنني لا أعرف طريقة لتعريفه . وينبغي أن نأخذ في بالنا أن المعاني الثلاثة لا بد أن تبقى متميزة ، أى إذا كان ا جزءاً من ب على أحد المعاني ، وكان ب جزءاً من ج على معنى آخر ، فلا يجب أن نستنتج (على وجه العموم) أن ا جزء من ج على أي معنى من المعاني الثلاثة . ولكن قد يمكن أن نذهب إلى معنى

(١) انظر مثلاً F. 1901, § 1, Prop. 4. 4, note (p. 12)

رابع عام يكون فيه أي شيء إذا كان جزءاً على أي معنى ، أو جزءاً على معنى لجزءه في معنى آخر ، فإنه يسمى جزءاً . ومع ذلك فهذا المعنى قل أن يكون له أي، تقع في المناقشة الحاضرة .

١٣٦ - ولما كان الفرق بين أنواع الكلات مهماً ويوضح نقطة أساسية في المنطق ، فإننا معاود بيانه في عبارة أخرى . إن أي مجموعة مهما يكن أمرها إذا عرفت بدالة قضية غير تربيعية ، فهي ولو أنها من حيث هي مجموعة ، فهي كثيرة ، إلا أنها تكون كلاً لأجزائه حدود المجموعة أو أي كل مركب من بعض حدود المجموعة . ومن المهم جداً ملاحظة الفرق بين الكل وجميع أجزائه حتى في هذه الحالة التي يكون الفرق فيها ضئيلاً . فلفظة « المجموعة » لأنها مفرد تكون أدق ، انطباقاً على الكل منها على جميع أجزائه ، ولكن مناسبة التعبير حماشي على اطراح النحو والكلام عن جميع الحدود كأنها المجموعة . وسأسمى الكل المكوّن من حدود المجموعة « الجملة » . ويتخصص مثل هذا الكل تخصصاً تاماً حين تتخصص جميع مكوناته البسيطة ، وليس لأجزائه صلة مباشرة فيما بينها بل إنما توجد صلة غير مباشرة من حيث إنها أجزاء كل واحد لا غير . ولكن تحصل كلات أخرى تشتمل على علاقات أو ما يمكن أن تسمى محمولات ليس حصولها مجرد أنها حدود في مجموعة بل على أنها تعلق أو تصف . ومثل هذه الكلات تكون دائماً قضايا لا تتعين تماماً حين تعرف جميع أجزائها . خذ مثلاً بسيطاً هذه القضية : « | يختلف عن ب » حيث | و ب حدان بسيطان ، فالأجزاء البسيطة في هذا الكل هي | و ب والاختلاف ، ولكن سرد هذه الثلاثة لا يعين الكل ما دام ثمة كلان آخران مركبان من نفس الأجزاء وهما الجملة المؤلفة من | و ب والاختلاف ، والقضية « ب يختلف عن | » . ففي الحالة الأولى مع أن الكل كان مختلفاً عنه جميع أجزائه إلا أنه تعين تماماً بتعيين أجزائه . أما في هذه الحالة فليس الكل مختلفاً فقط ولكنه لم يتعين حتى مع تعيين أجزائه . ولا يمكننا أن نشرح هذه الحقيقة بقولنا : إن الأجزاء تقوم على علاقات معينة تحذف عند التحليل ، إذ في الحالة السابقة « | يختلف عن ب » كانت العلاقة

مشمولة في التحليل . الواقع يبدو أن العلاقة تكون شيئاً حين تعلق ، وتكون شيئاً آخر حين تسرد مجرد سرد على أنها حد في مجموعة . وثمة صعوبات أساسية في هذه الوجهة من النظر أطرحتها جانباً على أنها غير داخلة في القرض من بحثنا الحاضر^(١) .

وتنطبق ملاحظات من هذا القبيل على قولنا « | موجود » « A is » وهذه جملة مركبة من « | » ومن « الوجود Being »^(٢) ، ولكنها مختلفة عن الكل المركب من الجملة | الوجود . وقولنا « | هو واحد » A is one يثير نفس النقطة ، وكذلك قولنا « | و هما اثنان » . حقاً جميع القضايا تثير هذه النقطة التي بها يمكن أن نميز بين القضايا وبين الحدود المركبة .

وهكذا نرى أن ثمة فصلين جد مختلفين من الكلات يسمى الأول منهما « الجملات » ، ويسمى الآخر « وحدات » . (الوحدة هنا لفظة لها تطبيق مختلف ، إذ كل ما هو فصل وليس صفراً ، وكان بحيث إذا كان س و ص حدين فيه وكانا متطابقين ، فهذا الفصل وحدة) . ويشتمل كل فصل من الكلات على حدود ليست مجرد مكافئة لجميع أجزائه . مثال ذلك أن الأجزاء | ، أكبر من ، ب قد تؤلف ببساطة جملة ، أو قد تؤلف إحدى هاتين القضيتين : « | أكبر من ب » أو « ب أكبر من | » . وهكذا تثير الوحدات مشكلات تخلو منها الجملات . وحيث كانت الجملات أدخل بوجه خاص في الرياضيات من الوحدات فسألترم بوجه عام في المستقبل استخدام الجملات .

١٣٧ - ومن المهم أن نتحقق أن الكل حد جديد مفرد متميز عن كل جزء من أجزائه ومن جميع هذه الأجزاء ؛ فهو واحد وليس كثيراً^(٣) ، وله علاقة بالأجزاء ولكن له وجود متميز عن وجودها . وقد يميل القارئ إلى الشك فيتساءل أئمة حاجة - خلاف الوحدات - إلى الكلات ، ولكن يبدو أن الأسباب

(١) انظر المجلد الأول ، الباب الرابع ، وبخاصة بند ٥٤ .

(٢) ليست التفرقة الاصطلاحية بين الـكون والوجود واضحة في اللغة العربية وضحها في الإنجليزية ، ولو أنه جرت العادة على ترجمة Being بالـكون وترجمة Existence بالوجود (التبريم)

(٣) أي أنه من نفس الطراز المنطقي كأجزائه البسيطة .

الآتية تجعل الجملات أمراً لا غنى عنه من الناحية المنطقية . (١) إننا نتكلم عن مجموعة واحدة ، وتشكيلة واحدة ، إلخ ، وقد يبدو أنه في كافة هذه الأحوال هناك حقاً شيء ما هو وحدٌ مفرد . (٢) يظهر أن نظرية الكسور ، كما سئرى بعد قليل ، تعتمد في جزء منها اعتماداً جزئياً على المجموعات . (٣) سئرى أنه من الضروري في نظرية الكمية الممتدة افترض أن المجموعات كى تكون غير متناهية لها ما قد يسمى بمقدار الانقسام وأن مجموعتين لامتناهيتين قد يكون لهما نفس عدد الحدود دون أن يكون لهما نفس مقدار الانقسام . وهذه النظرية كما سئرى لا غنى عنها في الهندسة القياسية . يبدو إذن من هذه الأسباب أننا يجب أن نسلم بالمجموعة كشيء متميز عن جميع مكوناتها وأجزائها ولها بكل منها علاقة معنية نهائية ولا تقبل التعريف .

١٣٨ — لقد عرضت فيما سبق للمذهب منطقي هام جداً يجعل من نظرية الكل والجزء الصدارة — أعني المذهب القائل بأن التحليل تمويه أو «سفسطة» . ذلك أن كل ما يمكن تحليله فهو كل ، وسبق أن رأينا أن تحليل الكلّات هو من بعض الوجوه تمويه . ولكن من المهم التحقق من الحدود الضيقة جداً لهذا المذهب . فنحن لا نستطيع استنتاج: أن أجزاء الكل ليست حقاً أجزاءه ، ولا أن تلك الأجزاء غير مفروضة في الكل بالمعنى الذي نقول عنه إن الكل غير مفروض في الأجزاء ، ولا أيضاً أن المتقدم منطقياً ليس عادة أبسط من المتأخر منطقياً . صفوة القول إن التحليل ولو أنه يعطينا الحق ولا شيء غير الحق إلا أنه لا يمكن أبداً أن يعطينا كل الحق . وهذا المعنى فقط هو الذي يجب أن نقبله من هذا المذهب . وإذا اتخذنا للتحليل أى معنى أوسع من ذلك أصبح مجرد رداء للكسل يلتبس به العنر أولئك الذين يمتقنون العمل .

١٣٩ — علينا ملاحظة أن ما سميناه بالفصول كواحد قد تؤول دائماً على أنها مجموعات ، إلا حيث تشتمل على حد واحد أو لا تشتمل على أى حد ، أو حيث كانت معرفة بدوال القضايا التريعية . وحاصل الضرب المنطقي لفصلين كواحدين هو الجزء المشترك (على المعنى الثانى من المعانى الثلاثة المذكورة) (٤)

للمجموعتين ، ومجموعهما هو المجموعة المطابقة لأي مجموعة أو الجزء (أيضاً على المعنى الثاني) من أي مجموعة تكون المجموعتان المعطيتان جزأين منها ؛ ولا تكون مطابقة لأي مجموعة أخرى أو جزءاً منها^(١) . وعلاقة الكل بالجزء على المعنى الثاني من معانينا الثلاثة علاقة متعلدية وغير متماثلة ولكنها متميزة عن غيرها من العلاقات بأنها تسمح بالجمع والضرب المتطيقين، وهذه الخاصية هي التي تكون أساس الحساب التحليلي المنطقي كما بحثه علماء سابقون على بيانو وفريج (ومنهم شريدس^(٢)). ولكن حيث كان الأمر متعلقاً بالكالات اللامتناهية، فن الضروري، وفي كثير من الحالات الأخرى لا مناص عملياً من البدء بفصل تصور أو محمول أو دالة قضية لنحصل منها على المجموعة . وبذلك تكون نظرية الكل والجزء أقل جوهرية من الناحية المنطقية من نظرية المحمولات أو فصول التصور أو دوال القضايا ، ولهذا السبب أرجأنا النظر فيها إلى هذه المرحلة المتأخرة .

(١) انظر Peano, F. 1901, § 2, 1.0 (p. 19)

(٢) انظر مثلاً كتابه . Algebra der Logik, Vol. 1 (Leipzig 1890)

الباب السابع عشر

الكلمات غير المنتهية

١٤٠ - لن ننظر في الصعوبات الخاصة بالانتهية في الباب الحاضر ،
وسنرجئ الحديث عنها إلى الجزء الخامس . وغرضي الآن النظر في مسألتين :
(١) هل توجد كلمات لامنتهية ؟

(٢) وإن وجدت فهل يجب أن يكون الكل اللامنتهي ، الذي يشتمل
على أجزاء ، على المعنى الثاني من معانينا الثلاثة ، جملة مركبة من أجزاء على المعنى
الأول ؟

ولكي نتجنب الإشارة إلى المعنى الأول والثاني والثالث فإنني أقترح من
الآن فصاعداً استخدام هذه الاصطلاحات : الجزء بالمعنى الأول يسمى
« حدة » الكل ^(١) . والجزء بالمعنى الثاني يسمى « جزءاً » فقط . والجزء بالمعنى
الثالث يسمى « مكوناً » من مكونات الكل . وبذلك تنتمي الحدود والأجزاء إلى
الجملات ، على حين تنتمي المكونات إلى الوحدات . وإذا كان لا بد من
بحث الجملات والوحدات فيما يختص بالانتهية كل منها على حدة فسأبدأ
بالنظر في المجموعات .

الجملة اللامنتهية تناظر الفصل اللامنتهي ، أي الجملة التي لها عدد لامتناه
من الحدود ، وتعرف مثل هذه الجملات بأنها تشتمل على أجزاء لها من الحدود
مثل ما لها من أجزاء . وسؤالنا الأول هو : أتوجد مثل هذه الجملات ؟
غالباً ما يتكررون وجود الجملات اللامنتهية . وقد ذهب حتى أيبستر الذي
كان متصباً لوجود اللامنتهي بالفعل ، إلى أنه حيث يتعلق الأمر بالفصول
اللامنتهية ، فمن الممكن إصدار أحكام صحيحة عن « أي » حد من الفصل ولكن

(١) الجزء بهذا المعنى يسمى كذلك جزئاً بسيطاً أو لا متقها .

لا عن « جميع » الخلود ، ولا حتى عن الكل الذى (كما يقول) « لا » تؤلفه هذه الخلود^(١) . وكذلك كانط ؛ فقد انتقد بسبب ذهابه إلى أن المكان كل لا متناه . وينهب كثيرون إلى أن كل جملة يجب أن يكون لها عدد متناه من الخلود ، وحيث لا يتحقق هذا الشرط فليس ثمة كل حقيقى . ولكنى لا أعتقد أن مثل هذه الوجهة من النظر يمكن الدفاع عنها بنجاح . ويسلم عدد غير قابل من الذين ينكرون أن المكان كل معطى بأن ما يسمونه بالمكان المتناهي قد يكون كلا معطى ، مثال ذلك المكان فى غرفة أو صندوق أو حقيبة أو حافظة كتب . ولكن مثل هذا المكان إنما هو متناه بمعنى نفسانى ، أى بالمعنى الذى ندرسه فى لحظة واحدة . وليس هو متناهماً على معنى أنه جملة من عدد متناه من الخلود ، ولا حتى على معنى أنه وحدة مركبة من عدد متناه من المكونات . فالتسليم بأن مثل هذا المكان يمكن أن يكون كلا تسليم بأن ثمة كلات ليست متناهية . (ويجب ملاحظة أن هذا ليس نتيجة التسليم بوجود أشياء مادية تشغل بوضوح أمكنة متناهية ، إذ من الممكن دائماً القول بأن مثل هذه الأشياء ولو أنه من الواضح أنها متصلة فإنها تتكون فى الحقيقة من عدد كبير ولكنه متناه من النقاط المادية) . ويصبح هذا القول نفسه بالنسبة للزمان ، فأن تقول مثلاً إن طولاً معيناً من الزمان يقع بين شروق الشمس وغروبها فكأنك تسلم بوجود كل لا متناه ، أو على الأقل كل ليس متناهماً . وقد جرت عادة الفلاسفة أن ينكروا حقيقة المكان والزمان ، وأن ينكروا كذلك أنهما إذا كانا حقيقين فإنهما جملتان . وسأحاول أن أبين فى الجزء السادس أن هذا الإنكار يعتمد على منطق خاطئ ، وعلى الصعوبات الخاصة بفكرة اللانهاية التى وجدت لها حلاً اليوم . وما دام العلم والعقل السلم يتفان فى جانب الوجهة المقابلة من النظر ، فستقبل فكرة اللانهاية . وحيث لا يوجد أى دليل أولى يمكن أن يوجه ضد الجملات اللامتناهية ، فلنا أن نستمد من المكان والزمان دليلاً فى صالحهما .

ثم إن الأعداد الطبيعية natural ، أو الكسور بين ٠ و ١ ، أو المجموع الكلى

(١) انظر Phil. Werke, ed. Gerhardt, 11, 315; also 1, p. 338, V, pp. 144-5.

لجميع الألوان، لامتناهية ويبدو أنها جملات حقيقية، وذلك من جهة أنه إذا كان ممكناً قول قضايا صادقة عن «أى» عدد فليس ذلك صحيحاً عن «جميع» الأعداد كما ذهب إلى ذلك السابقون ومنهم لينتر على أساس متناقضات الانهائية، إلا أن ذلك أصبح غير لازم بتاتاً منذ أن حل كانتور هذه المتناقضات. أما حيث يمكن تعريف المجموعة بدالة قضية غير تربيعية فإني أظن أن هذا يجب أن يدل على وجود جملة أصلية مركبة من حدود المجموعة. ويلاحظ كذلك أنه إذا لم تكن ثمة كلات لامتناهية فإن لفظة «الكون» Universe تكون خالية تماماً من المعنى.

١٤١ - لا بد لنا إذن من التسليم بوجود جملات لامتناهية. ويبقى علينا أن نسأل سؤالاً أكثر صعوبة وهو: هل لنا أن نسلم بوجود وحدات لامتناهية؟ وهذا السؤال يمكن كذلك صياغته على النحو التالى: هل هناك أى قضايا مركبة لامتناهية؟ وهذا السؤال على جانب كبير جداً من الأهمية منطقياً، وسنحتاج إلى كثير من العناية فى تقريره ومناقشته.

وأول نقطة يجب أن تكون واضحة فيما يختص بمعنى الوحدة اللامتناهية. تكون الوحدة لامتناهية حين تكون جملة جميع مكوناتها لامتناهية، ولكن هذا البيان يصعب أن يقوم معنى الوحدة اللامتناهية. فلا بد من إدخال فكرة المكون «البيسط» بغية الحصول على المعنى. ولنبدأ بأن نلاحظ أن مكون المكون مكون للوحدة، أى أن هذه الصورة من علاقة الجزء بالكل صورة متعددة، مثل الثانية، ولكنها مختلفة عن الصورة الأولى. ويمكن تعريف المكون البسيط بأنه ذلك الذى ليس له هو نفسه مكونات. وقد نفترض كى نستبعد السؤال الخاص بالجملات أنه لا مكون فى الوحدة التى نبحثها هو جملة، أو إذا كان ثمة مكون هو جملة فيجب أن يؤخذ هذا المكون على أنه بسيط. (هذه الوجهة من النظر عن الجملة تصبح مشروعة، لأن الجملة حد مفرد ولا يحتاج إلى ذلك النوع من التعقيد (التركيب) الخاص بالقضايا). وبهذا يكمل تعريف المكون البسيط. ويمكن الآن أن نعرف الوحدة اللامتناهية بما يأتى: تكون الوحدة متناهية

عند ما ، وعند ما فقط ، تكون جملة مكوناتها البسيطة متناهية . ويقال عن الوحدة إنها لامتناهية في جميع الأحوال الأخرى . وعلينا الآن أن نبحث أنوجد مثل هذه الوحدات (١) .

وإذا كانت الوحدة لامتناهية فمن الممكن أن نجد وحدة مكونة تشتمل بدورها على وحدة مكونة، وهكذا بغير نهاية . وإذا كانت هناك أى وحدات بهذه الطبيعة فهناك حالتان ممكنتان لأول وهلة وهما :

(١) قد تكون هناك مكونات بسيطة للوحدة المذكورة ، ولكن هذه المكونات لا بد أن تكون لامتناهية في العدد .

(٢) قد لا تكون هناك أى مكونات بسيطة على الإطلاق ، ولكن جميع المكونات بغير استثناء قد تكون مركبة . أو خذ حالة معقدة شيئاً ما ، فقد يحصل أنه ولو أن ثمة بعض المكونات البسيطة إلا أنها والوحدات المركبة منها لا تكون جميع مكونات الوحدة الأصلية . وتسمى الوحدة من أى نوع من هذين لامتناهية . وقد يمكن بحث النوعين معاً ولو أنهما متميزان .

الوحدة اللامتناهية ستكون قضية مركبة إلى ما لانهاية له : أى لا تقبل التحليل بأى طريقة إلى عدد متناه من المكونات ، فتختلف بذلك اختلافاً أساسياً عن الأحكام الدائرة على جملة لامتناهية . مثال ذلك هذه القضية : « أى عدد له تال » فهي مركبة من عدد محدود من المكونات ، ويمكن إحصاء عدد التصورات الداخلة فيها ، وإلى جانب ذلك فهناك جملة لامتناهية من الحدود تدل عليها الطريقة المشار إليها بقولنا « أى » الذى نعهده أحد المكونات . حقاً قد يقال إن الغرض المنطقي الذي تخدمه نظرية الدلالة هو تمكين القضايا المركبة تركيباً نهائياً من الكلام على فصول لامتناهية من الحدود : ويحقق هذا الغرض باستخدام « جميع » و « أى » و « كل » ، وإذا لم يتحقق ذلك كانت كل قضية عامة عن فصل لامتناه مركبة تركيباً لامتناهياً . أما من جهتي فلست أرى طريقة ممكنة أجزم بها أكون القضايا اللامتناهية التركيب ممكنة أو لا . ولكن الواضح لنا على الأقل هو أن جميع القضايا المعروفة لنا (وفيما يبدو جميع

(١) في فلسفة لينتز جميع الأشياء الحادثة فهي وحدات لا متناهية .

القضايا التي يمكن لنا معرفتها) مركبة تركيباً متناهياً. وإنما نتمكن من بحث اللانهاية عند ما نحصل على مثل هذه القضايا عن القصول اللامتناهية. ومن الحقائق الملاحظة والموققة أن هذه الطريقة ناجحة. وبذلك لا بد من ترك السؤال الخاص بوجود، أو عدم وجود، وحدات لامتناهية بغير حل. والشئ الوحيد الذي يمكننا قوله في هذا الموضوع هو أنه لا شئ من مثل هذه الوحدات يقع في أي باب من أبواب المعرفة الإنسانية، وعلى ذلك فلا شئ منها يدخل في أساس الرياضيات.

١٤٢ - وانتقل الآن إلى السؤال الثاني: هل يجب أن يكون الكل اللامتناهي الذي يشتمل على أجزاء جملة مركبة من حدود؟ لقد قيل غالباً مثلاً إن للأمكنة أجزاء، وأنه يمكن أن تنقسم إلى الحد المطلوب، ولكن ليس لها أجزاء « بسيطة »، أي أنها ليست جمالات من النقط، وتقال مثل هذه النظرية نفسها عن فترات الزمان. ومن الواضح الآن أنه إذا كان تعريفنا للجزء بواسطة الحدود (أي للمعنى الثاني للجزء بواسطة الأول) صحيحاً، فلا يمكن للمشكلة الحاضرة أن تقوم ما دامت الأجزاء إنما تنتمي للجمالات. ولكن قد يقال إن معنى « الجزء » يجب أن يؤخذ على أنه لا يقبل التعريف، فينتطبق بذلك على الكلات لا على الجمالات، وهذا يتطلب منا أن نضيف إلى الجمالات والوحدات نوعاً جديداً من الكل يناظر المعنى الثاني للجزء. وسيكون هذا الكل ذا أجزاء بالمعنى الثاني، ولكنه ليس جملة ولا وحدة. ويبدو أن مثل هذا الكل هو ما يقوم كثير من الفلاسفة بتسميته المتصل، ويقدم المكان والزمان غالباً أمثلة على مثل هذا الكل.

وقد يسلم أننا نجد بين الكلات اللامتناهية تمييزاً « يبدو » أنه صحيح، ولكنني أعتقد أنه في الواقع ليس إلا تمييزاً نفسانياً. ففي بعض الأحوال لا نشعر بأى شك حول الحدود، ولكننا نشعر بشك عظيم حول الكل، وفي بعض الأحوال الأخرى يبدو الكل واضحاً ولكن الحدود يبدو من استنباطها أنها مزعومة. مثال ذلك أن النسب بين ١ و ١ هي بكل تأكيد غير منقسمة، ولكن الجملة كلها

لنسب بين ٠ و ١، يبدو أنها من طبيعة التركيب أو الاستنباط. ومن جهة أخرى يبدو أن الأمكنة والأزمنة المحسوسة هي كالات واضحة ، ولكن استنباط النقط والملاحظات اللامتنقمة هي من الغموض بحيث تعتبر غالباً غير مشروعة . ومع ذلك يبدو أن هذا التمييز ليس له أساس منطقي ولكنه يعتمد اعتماداً كلياً على حواسنا. وإن معرفة بسيطة بالهندسة الأحادية تكفي أن تجعل الطول المتناهي يبدو مماثلاً تمام المماثل لامتداد الكسور بين ٠ و ١. وعلى الرغم من ذلك يجب أن نسلم أنه في الأحوال التي تكون الأجزاء اللامتنقمة كالحال في الكسور واضحة بالمعينة فلا محل للمشكلة التي نحن بصدد حلها. ولكن من المخافة القول بأن جميع الكالات اللامتناهية لها أجزاء لامتنقمة مجرد أننا نعرف ذلك من حالة بعضها. وبناء على ذلك لا تزال المشكلة قائمة وهي : إذا سلمنا بوجود كل لامتناه، فهل ثمة سبب عام يجعلنا نفترض أن يشتمل على أجزاء لامتنقمة ؟

١٤٣ - أول كل شيء لا يجب أن يؤخذ تعريف الكل غير المتناهي على أنه ينكر أن له عدداً معيناً من الأجزاء البسيطة لا تعيد تركيبه. مثال ذلك أن امتداد الكسور من ٠ إلى ١ له ثلاثة أجزاء بسيطة هي $\frac{1}{4}$ ، $\frac{1}{2}$ ، $\frac{3}{4}$. ولكنها لا تعيد تركيب الكل ، أى لكل أجزاء أخرى ليست أجزاء من الأجزاء المعينة ، أو مجموع الأجزاء المعينة. ثم إذا ركبنا كلا من العدد ١ ومن خط طوله بوصة ، فلهذا الكل دون ريب جزء واحد بسيط هو ١. وقد يمكن استبعاد مثل هذه الحالة بالتساؤل: هل كل جزء من الكل هو جزء بسيط ، أو يشتمل على أجزاء بسيطة. وفي هذه الحالة إذا كان الكل مركباً من جمع له من الحدود لكل لامتناه، فيمكن حذف هذه الـ ١ من الحدود البسيطة ، ويبقى السؤال عن الكل اللامتناهي الباقي. ومرة أخرى يبدو أن معنى سؤالنا هو ما يأتي : هل معنى الكل اللامتناهي عبارة عن جملة فعلية من أجزاء بسيطة لا تحصى ؟ لا ريب أن هذا السؤال هام ولكنه تابع لهذا السؤال : أهناك دائماً أجزاء بسيطة على الإطلاق ؟ قد نلاحظ أنه إذا وجد عدد بسيط متناه من الأجزاء ثم انتزعت من الكل ، فالباقي يكون دائماً لامتناهياً. وإذا لم يكن الأمر كذلك لكان عدده متناهياً ،

وما دام حد عددين متناهين متناهياً ، فالكل الأصلي متناه تبعاً لذلك . فإذا استطعنا إثبات أن كل كل لامتناه يشتمل على جزء واحد بسيط ترتب على ذلك أنه يشتمل على عدد لامتناه من هذه الأجزاء . لأننا إذا حذفنا الجزء البسيط كان الباقي كلاً لامتناهياً وله تبعاً لذلك جزء بسيط جديد ، وهكذا . يترتب على ذلك أن كل جزء من الكل إما أن يكون بسيطاً ، وإما أنه يشتمل على أجزاء بسيطة ، بشرط أن يكون لكل كل لامتناه جزء بسيط واحد على الأقل . ولكن يبدو أن صعوبة إثبات ذلك كصعوبة إثبات أن كل كل لامتناه هو جملة .

وإذا انقسم الكل اللامتناهي إلى أجزاء متناهية فيجب أن يكون جزء على الأقل من هذه الأجزاء لامتناهياً ، وإذا انقسم هذا بدوره ، فيجب أن يكون جزء من أجزائه لامتناهياً ، وهكذا . وبذلك لا يبرُد أي عدد متناه من القسمة جميع الأجزاء إلى انتهاى . والقسمة المتتالية تعطى سلسلة لانهائية لها من الأجزاء ، وليس في هذه السلسلة اللانهائية أي وجه للتناقض (كما سنرى في الجزئين الرابع والخامس) . وبذلك لا توجد طريقة لإثبات بواسطة القسمة الفعلية أن كل كل لامتناه يجب أن يكون جملة . ومقدار ما نستطيع أن نتبينه من هذه الطريقة فلا حاجة إلى مكونات بسيطة في الكلات اللامتناهية كما لا حاجة إلى لحظة أولى في الزمان أو عدد متناه أخير .

ولكن ربما يبرز تناقض في الحالة التي نحن بصدددها ينشأ عن الصلة بين الكل والجزء وبين التقدم المنطقي . ولا ريب أننا إذا ذهبنا إلى أن الكلات اللامتناهية ليس لها أجزاء منقسمة ، فقد يبدو التناقض أعظم مما إذا ذهبنا إلى أنه لا توجد لحظة أولى في الزمان أو حد أبعد في المكان . ولعل تفسير ذلك يرجع إلى أننا نعرف كثيراً من الحدود البسيطة ، وأن بعض الكلات اللامتناهية تتركب ولا ريب من حدود بسيطة ، على حين أننا لا نعرف شيئاً يوحى ببداية في الزمان أو المكان . ولكن قد يكون لهذه المسألة أساس أكثر ثباتاً في التقدم المنطقي ، لأن الأبسط داخل دائماً في الأبعد بحيث لا يمكن قيام أي حقيقة عن الأبعد ، إلا إذا قامت الحقيقة عن الأبسط ، ولهذا السبب فنحن في تحليل الكل اللامتناهي

نبحث دائماً في أشياء لولا وجود مكوناتها لم تكن لتوجد ألبتة . وبين هذا التقدم المنطقي وبين التسلسل الزماني فرق حقيقي ، لأن اللحظة مثلاً لا تفرص منطقياً وجود لحظة سابقة ، ولو افترضت ذلك لكان من التناقض إنكار وجود لحظة أولى ، كما ذهبوا (لنفس السبب) إلى أنه من التناقض إنكار وجود السبب الأول . ويبدو أنه يترتب على ذلك أن الكلات اللامتناهية ليس لها وجود ألبتة ، إلا إذا كان هناك عدد لا يحصى من الموجودات البسيطة وجودها مفروض في تلك الكلات اللامتناهية . لأنه إذا كان الغرض باطلاً ، فالنتيجة باطلة كذلك . وهكذا يبدو أن هناك سبباً خاصاً لإتمام التراجع اللانهائي في حالة الكلات اللامتناهية مما لا يوجد إذا كانت هناك علاقات غير متناهية موضع بحث . وهذا مثال آخر على خصوصية علاقة الكل بالجزء ، وهي علاقة تبلغ من الأساسية والأهمية ما يكاد يجعل جميع فلسفتنا تعتمد على النظرية التي نأخذ بها بالنسبة إليها .

ويمكن وضع نفس الحجة بشكل آخر بأن نسأل كيف نعرف الكلات اللامتناهية ، وهذا التعريف يجب ألا يكون لامتناهياً في التركيب حتى لا يحتاج إلى وحدة لامتناهية . فإذا كان ثمة أي تعريف متناهي التركيب فلا يمكن الحصول عليه من الأجزاء التي إما أن يكون عددها لانهائياً (في حالة الجملة) وإما أن تكون هي نفسها مركبة كالكل (في حالة الكل الذي ليس بجملة) . ولكن أي تعريف متناهي التركيب سيكون بالضرورة بالمفهوم ، أي سيعطى بعض خصائص مجموعة من الحدود . ويبدو أن ليس ثمة طريقة أخرى معروفة لتعريف الكل اللامتناهي ، أو للحصول على مثل هذا الكل بطريقة لا تدخل فيها أي وحدة لامتناهية .

ويجب التسليم بأن الحجة المذكورة أقل جزءاً مما كنا نود ، وذلك بالنظر إلى الأهمية العظمى للنقطة التي نبحثها . وقد يقال مع ذلك في تأييدها إن جميع الحجج المقابلة تعتمد على الصعوبات المفروضة للانهاية ، فكلها من أجل ذلك باطلة . وأيضاً فإن طريقة الهندسة والديناميكا (كما سنيين في الجزئين السادس والسابع) تتطلب بالضرورة التقط واللحظات .

صفوة القول في جميع التطبيقات نجد أن نتائج المذهب الذي ندافع عنه أبسط بكثير ، وأقل تناقضاً ، وأعظم لإرضاء من الناحية المنطقية من نتائج النظرية المقابلة . ولهذا السبب سأفترض خلال بقية هذا الكتاب أن جميع الكلات اللامتناهية التي نبحث في أمرها هي جملات من الحدود .

الباب الثامن عشر

النسب والكسور

١٤٤- سيقصر الباب الحاضر أسامياً بمقدار ما يبحث في علاقات الأعداد الصحيحة على الأعداد الصحيحة «المتناهية» ، أما تلك اللامتناهية فليس لها علاقات شبيهة بالضبط بما نسميه عادة النسب . غير أني سأميز النسب كمعلاقات بين الأعداد الصحيحة عن الكسور التي هي علاقات بين جملات ، أو قل بين مقادير انقسامها . وسنرى أن الكسور قد تعبر عن علاقات تقوم حيث تكون كلا الجملتين لامتناهيتين . ومن الضروري أن نبدأ بالتعريف الرياضي للنسبة قبل الشروع في بحث اعتبارات أكثر عموماً .

ترتبط النسبة عادة بالضرب والقسمة ، فتصبح بذلك غير متميزة عن الكسور . ولكن الضرب والقسمة ينطبقان على السواء على الأعداد المتناهية واللامتناهية ، ولو أنه في حالة الأعداد اللامتناهية ليس لهما الخصائص التي تربطهما في حالة التناهي . ولذلك يصبح من الأوفق إقامة نظرية في النسبة تكون مستقلة عن الضرب والقسمة .

يقال عن عددين متناهيين إنهما متعاقبان إذا كان y فصلاً يشتمل على أحد العددين ، ثم أضيف حد واحد إلى y فكان الفصل الناتج عن ذلك مشتملاً على العدد الآخر . فالتعاقب إذن هو علاقة واحد بواحد وغير متماثلة . فإذا كان للعدد a مع العدد b القوة التوافقية لهذه العلاقة من التعاقب (من حيث أن قوى العلاقات تعرف بالضرب النسبي) لكان $a + b = b$. وتعتبر هذه المعادلة بين a و b عن علاقة واحد بواحد تتحدد حين تعلم b . فإذا كانت القوة الميمية لهذه العلاقة تقوم بين a و b ، فإننا نحصل على المعادلة الآتية : $a + m = b$. وأيضا يمكن تعريف m بأنها $0 + m = b$. فإذا كان عندنا ثلاثة أعداد

١ ، ب ، ح بحيث يكون $ا = ب = ح$ ، فإن هذه المعادلة تعبر عن علاقة واحد بواحد بين ا و ح وتتحدد هذه العلاقة حين تعلم ب . ولنسم هذه العلاقة « B » .
 ولنفرض أيضاً أن $ا = ب = ح$ ، فيرتب على ذلك أن بين ا و ا علاقة هي حاصل الضرب النسبي بين B وعكس B حيث تشتق B من ب ، كما اشتقت B من ب . ونعرف هذه العلاقة بأنها النسبة بين ا و بين ا . وزية هذه النظرية أنها لا تنطبق فقط على الأعداد الصحيحة المتناهية ، بل على جميع المتسلسلات من نفس الصنف ، أى جميع المتسلسلات من الصنف الذى اسمه «تواليات» .

١٤٥ - والنقطة الوحيدة التى تهمنى ملاحظتها بخصوص غرضنا من هذا البحث فيما يتعلق بالتعريف المذكور عن النسب ، هي أن هذه النسب عبارة عن علاقات واحد بواحد بين الأعداد الصحيحة المتناهية ، وهى جميعاً باستثناء حالة واحدة غير متماثلة ، ويقوم بين كل زوجين من عدددين صحيحين متناهيين معينين علاقة واحدة لا غير ، ويمكن تعريفها بصيغة التعاقب ، وتكون بذاتها متسلسلة ليس لها حد أول أو أخير ، ولها حد بين أى حدين معينين ، فلها لذلك بينهما عدد لانهاى من الحدود . وما دامت النسب علاقات فينتج عن ذلك أن النسب لا يمكن أن تتطابق مع الأعداد الصحيحة ، مثال ذلك نسبة ٢ إلى ١ فإنها شيء يختلف بالكاكية عن ٢ . ولذلك عندما نتكلم عن متسلسات النسب باعتبار أنها تشتمل على أعداد صحيحة ، فليست الأعداد الصحيحة المشمولة أعداداً أصلية ، بل علاقاتها تناظر واحد بواحد مع الأعداد الأصلية . وتنطبق نفس هذه الملاحظة على الأعداد الموجبة والسالبة .
 فالقوة الزونية لعلاقة التعاقب ، هي العدد الموجب + ، الذى هو تصور مختلف تماماً عن العدد الأصلى . ثم إن اختلاط الأشياء بأشياء أخرى لها معها علاقة واحد بواحد هامة ، من الأخطاء التى كثيراً ما يتعرض الرياضيون للوقوع فيها ، وهو خطأ أحدث خلطاً شديداً فى فلسفة الرياضيات . وسرى فيما بعد أمثلة لا حصر لها على هذا الخطأ نفسه ، ولذلك يحسن المبادرة بمعرفة أن أى فشل فى التمييز الدقيق على الأقل فى هذا الموضوع سيكون له أوخم العواقب .

ولا صعوبة في ربط نظرية النسبة المذكورة سابقاً بالنظرية العادية المشتقة من الضرب والقسمة ، غير أن النظرية العادية لا تبين كما تفعل النظرية الحالية ، لم لا يكون للأعداد الصحيحة اللامتناهية نسب تشبه بالضبط تلك التي للأعداد الصحيحة المنتهية . الواقع تعتمد النسبة على التعاقب ، والتعاقب كما عرفناه فيما سبق لا يوجد بين الأعداد الصحيحة اللامتناهية ما دامت لا تتغير بإضافة ١ إليها .

ومن الواجب ملاحظة أن ما يسمى جمع النسب يتطلب مجموعة جديدة من العلاقات بين النسب ، وهي علاقات يمكن أن تسمى نسباً موجبة وسالبة ، كما أن بعض العلاقات بين الأعداد الصحيحة هي أعداد صحيحة موجبة وسالبة . ومع ذلك فلا حاجة بنا إلى فضل من القول في هذا الموضوع .

١٤٦ - يجب الاعتراف بأن نظرية النسبة المذكورة سابقاً لها مظهر صناعي جداً ، وهو مظهر يجعل من الغرابة أن تبدل النسب بما يحصل في الحياة اليومية . الواقع أن ما يحصل في الحياة اليومية هو الكسور لا النسب ، وليست الكسور شيئاً حسابياً خالصاً ، ولكنها تتصل في الواقع بعلاقات الكل والجزء .

إن القضايا التي تثبت أحكاماً عن الكسور توضح فرقاً هاماً عن القضايا التي تثبت أحكاماً عن الأعداد الصحيحة . فقد يمكن أن نقول إن $\frac{1}{2}$ واحد ، أو $\frac{2}{2}$ اثنان ، وهكذا ، ولا يمكننا أن نقول : اثنان ، أو $\frac{3}{2}$ واحد وثلاثون . ذلك أننا نحتاج دائماً إلى شيء آخر له مع الشيء الأول علاقة الكسر المعينة فنقول اثنان ، أو $\frac{3}{2}$ واحد وثلاثون ، وهكذا . قصارى القول : الكسور إما علاقة جزء بسيط بالكل ، أو علاقة كلين أحدهما بالآخر . ولكن ليس من الضروري أن يكون الكل الواحد ، أو الجزء البسيط ، جزءاً من الكل الآخر . ويبدو أن الأمر بسيط في حالة الكلات المنتهية ، فالكسر يعبر عن نسبة عدد الأجزاء في الكل الأول وبين عددها في الكل الآخر . ولكن النظر في الكلات اللامتناهية سيبين لنا أن هذه النظرية البسيطة قاصرة عن الواقع .

١٤٧- لا نزاع في أن معنى قولنا نصف فرسخ ، ونصف يوم ، من المعاني المشروعة ، ولذلك لا بد من البحث عن معنى ما للكسور لا يعتمد أساساً على العدد. لأننا إذا قسمنا مدة معينة من أربع وعشرين ساعة إلى جزئين متصلين كل منهما هو نصف المدة كلها ، فليس ثمة إلا طريقة واحدة لعمل هذه القسمة ، ولكن « كانتور » قد بين أن أي طريقة ممكنة لقسمة المدة إلى قسمين متصلين فإنها تقسمها إلى جزئين لهما نفس « عدد » الحدود . لذلك لا بد من وجود وجه آخر تكون بحسبه المدة المكونتين كل منهما من اثني عشرة ساعة متساويتان ، بينما تكون الساعة والثلاثة والعشرون غير متساويتين . وسأبحث هذا الموضوع بحثاً أوسع في الجزء الثالث من هذا الكتاب ، أما الآن فسأشير إلى أن ما نحتاج إليه هو من طبيعة المقدار ، وأن ذلك لا بد أن يكون أساساً خاصية من خصائص الكلات المرتبة . وسأسمى هذه الخاصية « مقدار الانقسام » فإن نقول إن $\frac{1}{2}$ نصف ب ، يعني أن ب كل ، فإذا قسم ب إلى جزئين متساويين . لكل منهما نفس مقدار الانقسام كما للآخر ، فإن $\frac{1}{2}$ له نفس مقدار الانقسام . كالذي لكل من الجزئين . وقد يمكن تفسير الكسر $\frac{1}{2}$ على نحو أبسط شيئاً ما بأن ننظر إليه كعلاقة (شبيهة بالنسبة طالما كانت الكلات المنتهية هي موضع البحث) بين مقداري أنقسام . وهكذا فإن الكسور المنتهية الصحيحة (مثل $\frac{3}{4}$) تقيس علاقة الانقسام لجملة من n من الحدود إلى الانقسام لحد مفرد . وتكون عكس العلاقة هي $\frac{1}{n}$. وهنا نجد فصلاً جديداً من الأشياء عرضة للاختلاط بالأعداد الصحيحة الأصلية ، مع أنه في الواقع متميز تماماً . والكسور على النحو الذي فسرنا ها به الآن لها مزية (وعلى هذه الميزة تعتمد جميع الهندسة القياسية) لإدخال التفرقة بين الأكبر والأصغر في الحملات اللامتناهية التي لها نفس عدد الحدود ، وسيتبين لنا أكثر فأكثر كلما ألقينا الضوء على قصور المباحث العادية في القياس إلى أي حد يبلغ معنى مقدار الانقسام من الجوهرية المطلقة في الواقع . فالكسور إذن ، بالمعنى الذي قد تعبر فيه عن علاقات جمالات لامتناهية — وهذا هو المعنى الذي يكون لها عادة في الحياة اليومية —

هى فى الواقع من طبيعة العلاقات بين مقادير الانقسام ، ومقادير الانقسام إنما تقاس بعدد الأجزاء حيث تكون الجملات التى نبحث فيها متناهية . وقد يمكن أن نلاحظ كذلك (ولو أن هذه الملاحظة سابقة لأوانها) أنه حيث تكون النسب بالتعريف المذكور سابقاً لمنطقة أساسياً ، فالكسور بالمعنى المذكور ها هنا تقبل كذلك قيماً غير منطوقة . وسنرجى بحث هذا الموضوع إلى الجزء الخامس من هذا الكتاب .

١٤٨ - يمكن الآن أن نلخص النتائج التى حصلنا عليها فى هذا الجزء الثانى . فى الأبواب الأربعة الأولى بسطنا فى إيجاز النظرية الرياضية الحديثة عن الأعداد الصحيحة الأصلية كما نشأت من تعاون أعمال الرياضيين والمناطق الرمزيين . وقد شرح الباب الحادى عشر معنى الفصول المتشابهة ، وتبين منه أن الخصائص الصورية العادية للأعداد الصحيحة ناتجة من تعريفها كفصول لفصول متشابهة . وبيننا فى الباب الثانى عشر كيف أن الجمع والضرب فى الحساب كليهما يعتمدان على الجمع المنطقى ، وكيف يمكن تعريفهما بطريقة تنطبق على سواء على الأعداد المنتهية واللامنتهية ، وعلى حاصل الجمع والضرب المنتهى واللامنتهى ، وبحيث فضلاً عن ذلك لا يدخل أى معنى للترتيب . وقدمنا فى الباب الثالث عشر تعريفاً دقيقاً للفصل اللامنتهى باعتبار أنه شبيه بفصل قد اقترح منه أحد حدوده ، وبيننا على وجه الإجمال كيف تربط هذا التعريف بتعريف الأعداد المنتهية بالاستقراء الرياضى . وناقشنا فى الباب الرابع عشر النظرية الخاصة بالأعداد الصحيحة المنتهية ، وبيننا كيف أن القضايا الأولية التى يثبت « بيانو » أنها كافية فى هذا الموضوع ، يمكن استنتاجها كلها من تعريفنا للأعداد الصحيحة الأصلية المنتهية . وهذا يؤيد رأينا من أن الحساب لا يشمل على أى لامعرفات أو لامبرهنتات بخلاف الموجود فى أساس المنطق العام .

ثم تقلعنا فى الباب الخامس عشر نحو البحث فى مسائل فلسفية نبغى منها اختبار الاستقراءات الرياضية المذكورة اختباراً نقدياً . واستقر رأينا على اعتبار

«الحد» و «حد ما» لاعمرفين ، وعلى تعريف العدد ١ وكذلك جميع الأعداد الأخرى بواسطة هذين اللامعرفين (مع بعض لا معرفات أخرى كذلك) وكذلك وجدنا أنه من الضروري التمييز بين الفصل وبين فصل تصوره ما دام يمكن أن يوجد للفصل الواحد عدة فصول تصور مختلفة . وقررنا أن الفصل يشتمل على جميع الحدود التي يدل عليها فصل التصور ، وهي دلالة بطريقة ماً لا تقبل التعريف . غير أنه ظهر أن كلا من الاستعمال الجارى ومعظم الأغراض الرياضية يبيع لنا أن نطابق بين الفصل وبين الكل المكوّن من الحدود التي يدل عليها فصل التصور . ورأينا أن الأسباب الوحيدة التي تقال ضد هذه النظرية ، هي ضرورة التمييز بين الفصل الذى يشتمل على حد واحد فقط وبين ذلك الحد الواحد ، ثم هذه الحقيقة وهي أن بعض الفصول حدود لنفسها . ووضعنا كذلك تمييزاً بين الفصول المنتهية واللامنتهية يقوم على أن الأولى يمكن تعريفها بالماصدق ولا يمكن ذلك بالنسبة للآخرى ، ونعني بتعريفها بالماصدق الإحصاء الفعلى لحدودها . وشرعنا بعد ذلك فى مناقشة ما يمكن أن يسمى بجمع الأفراد ، أى الفكرة الداخلة فى قولنا : « ا و ب » ، ووجدنا أن نظرية مستقلة شيئاً ماً عن الأعداد الصحيحة «المنتاهية» يمكن أن تستند إلى هذه الفكرة . ولكن ظهر آخر الأمر ، نتيجة ما قمنا به من تحليل لمعنى «الفصل» ، أن هذه النظرية لا تتميز فى الواقع عن النظرية السابقة ، والفرق الوحيد بينهما أن هذه النظرية أخذت بتعريف الفصول بالماصدق .

وكان موضوع الباب السادس عشر بحث علاقة الكل بالجزء ، فوجدنا لهذه العلاقة معنيين لا يقبلان التعريف ، ومعنى يقبله ، ويناطرهما نوعين مختلفين من الكلات سميناها على التوالى الوحدات والجملات . ورأينا أيضاً أنه إذا بسطنا فكرة الجملات لتشمل الحدود المفردة والفصل الصغرى فقد يمكننا اعتبار الكل المأخوذ به فى الحساب التحليلي التقليدي للمنطق الرمزي كجبر ينطبق بوجه خاص على علاقات الكلات بالأجزاء بالمعنى القابل للتعريف . ثم بحثنا فى الباب السابع عشر فكرة الكل اللامنتهى ، فانضح أن الوحدات (٥)

اللامتناهية حتى إذا كانت ممكنة منطقياً فلا تظهر ألبتة بأى حال فى أى شىء
 يمكن أن تبلغه المعرفة الإنسانية . ولكننا وجدنا أن الجملات اللامتناهية يجب
 التسليم بها ، وبدا أن جميع الكلات اللامتناهية إذا لم تكن وحدات فلا بد أن
 تكون جملات من الحدود ، ولو أنه ليس من الضرورى بأى حال أن تكون
 الحدود بسيطة . (ومع ذلك فيجب نظراً لاستبعاد الوحدات اللامتناهية افترض
 أنها ذات تركيب متناه) .

وأخيراً بحثنا فى الباب الثامن عشر النسب والكسور ، فرأينا أن النسب
 علاقات معقدة بعض الشيء للأعداد الصحيحة المتناهية ، أما الكسور فعلاقات
 بين انقسام الجملات ، وحيث كانت هذه الانقسامات مقادير ، فناقشنا
 تدخل فى الجزء الثالث من هذا الكتاب الذى نبحث فيه الطبيعة العامة للكمية .

الجزء الثالث

الكمية

الباب التاسع عشر

معنى المقدار

١٤٩ — علاقة الكمية بالعدد لا يعدونها في أهميتها إلا القليل من المشكلات التقليدية في الفلسفة الرياضية. وقد مر الرأي الخاص بهذه العلاقة بكثير من التطورات . أما أوقليدس بحسب ما يتضح من تعاريفه للنسبة والتناسب ، بل من طريقته بأسرها ، فلم يكن مقتنعاً بإمكان تطبيق الأعداد على المقادير المكانية . وحين جعل ديكارت وثيتا من هذا التطبيق مسلمةً أساسيةً في مذهبهما بإدخال الهندسة الاحداثية ، ظهرت طريقة جديدة مع أنها وافرة بالتائج إلا أنها أدت بكثير من أنواع التقدم الرياضى في القرن السابع عشر إلى نقص في الضبط المنطقي وققدان في دقة التمييز . فما المقصود بالقياس ، وهل جميع المقادير المكانية كانت خاضعة للقياس العددي ؟ كل ذلك من الأسئلة التي كانت تحتاج حتى وقت قريب جداً في معرفتها إلى الأداة الرياضية الضرورية ، ولا نزال حتى الآن نحتاج إلى عمل الشيء الكثير قبل الوصول إلى إجابة كاملة . وكانت النظرة السائدة تذهب إلى أن العدد والكمية هما الموضوعان للبحث الرياضى ، وأن الاثنين يبلغان من التشابه مبلغاً لا يحتاجان معه إلى تفرقة دقيقة . ولذلك كان العدد يطبق على الكميات دون أى تردد ، وبالعكس حيث تكون الأعداد الموجودة قاصرة عن القياس ، فقد كانت تبتدع أعداد جديدة على أساس أن كل كمية لا بد أن يكون لها قياس عددي .

وقد تغير لحسن الحظ الآن كل ذلك ، وظهر طريقان مختلفان من الأدلة شقهما أصلاً رجال مختلفون ، فوضعوا الأسس لتعريفات واسعة مع دقة كاملة في التفاصيل على حد سواء. فمن جهة نجد فايرشتراس ، وديدكند ، وكانتور ، وأتباعهم قد بينوا أنه إذا كان لا بد من استخدام الأعداد غير المنطقية استخداماً

معقولاً كقاييس للكسور الكمية ، فيجب أن تعرف دون الإشارة إلى الكمية . وهؤلاء العلماء أنفسهم الذين يبنوا ضرورة مثل هذا التعريف هم الذين حققوا الحاجة التي ابتدعوها . ومن هذا الطريق ابتدع خلال الثلاثين أو الأربعين السنة الأخيرة موضوع جديد أضاف إلى الصحة النظرية إضافة عظيمة ، وهو موضوع يمكن أن يسمى بحق علم الحساب ، لأنه إذ يبدأ بالأعداد الصحيحة ينجح في تعريف أى شيء آخر يحتاج إليه — المنطقات ، والنهايات ، واللامنطقات ، والاتصال ، وما إلى ذلك . وينتج عن ذلك أنه ليس من الضروري في جميع الخبر والتحليل افتراض أي مادة أخرى خلاف الأعداد الصحيحة وهي نفسها يمكن كما رأينا أن تعرف في صيغة منطقية . وهذا هو العلم ، أكثر بكثير من الهندسة غير الأفليدية ، الذي قضى حقاً على نظرية كانط الخاصة بالمعارف « الأولى » باعتبارها أساس الرياضيات . وقد كان الاتصال واللامنطقات فيما سبق القلاع الحصينة للمدرسة المسماة بالحدسيين ، غير أن هذه القلاع بعد الاستيلاء عليها لم تعد في أيديهم ، فقد نما علم الحساب حتى أصبح يشمل كل ما يمكن أن يسمى في الرياضة التقليدية بالرياضة البحتة .

١٥٠ — ولكن جنباً إلى جنب مع هذا الإصلاح البحت ، ظهر تقدم في الاتجاه المضاد ، فقد اخترعت فروع جديدة للرياضة لا تبحث في العدد — ولا في الكمية ، مثل الحساب التحليلي المنطقي ، الهندسة الإسقاطية ، نظرية المجموعات (في جوهرها) . وفضلاً عن ذلك فقد ظهر أن القياس — إذا كان المقصود منه تبادل علاقة الأشياء التي ليست أعداداً أو جملات مع الأعداد — ليس امتيازاً خاصاً بالكميات ، فبعض الكميات لا يمكن قياسها ، وبعض الأشياء التي ليست كميات (مثل النسب غير التوافقية المعروفة إسقاطياً) يمكن قياسها . الواقع أن القياس كما سئى يمكن أن ينطبق على جميع المتسلسلات من نوع معين — نوع يستبعد بعض الكميات ويشمل بعض الأشياء التي ليست كميات . وبذلك يصبح الانفصال بين العدد والكمية تاماً ، فكل منهما مستقل عن الآخر تماماً . وفضلاً عن ذلك فقدت الكمية ما

كان لها عادة من أهمية رياضية نظراً إلى أن معظم النظريات الخاصة بها يمكن تعميمها بحيث تصبح نظريات تخص الترتيب، فلا غرابة أن يكون من الطبيعي مناقشة الترتيب قبل مناقشة الكمية. ومع ذلك فلما كانت جميع القضايا الخاصة بالترتيب يمكن إثباتها مستقلة عن الترتيب، وذلك في بعض الأحوال الخاصة، ولا كانت الكمية مستقدم توضيحاً - يحتاج إلى مجهود أقل من التجريد - للأصول التي يجب تطبيقها على المتسلسلات بوجه عام؛ وعلاوة على ذلك لما كانت نظرية المسافة التي تكون جزءاً من نظرية الترتيب تفرض مقدماً بعض الآراء الخلافية فيما يخص بطبيعة الكمية، فسوف أسلك الطريق الأكثر اتباعاً فأبحث الكمية أولاً. وسأهدف في هذا الباب إلى بسط نظرية في الكمية لا تعتمد على العدد، ثم أبين العلاقة الخاصة بالعدد الذي يكون لفصلين معينين من الكميات، وعلى أساس هذه العلاقة يعتمد قياس الكميات حينما كان هذا ممكناً. ومع ذلك فجميع هذا الجزء من الكتاب - ومن المهم أن تعرف ذلك - تسليم بالنظرة التقليدية. لأن الكمية كما سنرى لا تقبل التعريف في صيغ من الثوابت المنطقية، وليست بالفضبط معنى ينتمى للرياضة البحتة ألبتة. سأناقش الكمية لأننا ورثنا افتراض ورودها في الرياضة، ولأننا في حاجة إلى مناقشة كاملة لإبطال هذا الافتراض. ولو أن هذا الافتراض لم يوجد لتجنبنا أى ذكر لمثل هذا المعنى الذي يسمى الكمية.

١٥١ - عند تحديد معنى اصطلاح «الكمية» أو «المقدار»، نواجه هذه الصعوبة وهي: أننا حتى إذا استطعنا تعريف اللفظ فيجب أن نظهر من "يفترق عن الاستعمال الجارى. وتنشأ هذه الصعوبة حينما توجد خاصيتان يفترض عادة أنهما غير منفصلتين، ولكننا نكتشف بعد الفحص الدقيق أنهما قابلان للوجود منفصلين. وفي حالة المقدار يبدو أن المعنى العادى ينطوى على:

١ - القدرة على قبول علاقتي «الأكبر» و «الأصغر».

٢ - قبول الانقسام.

ومن المفروض أن الأولى من هاتين الخاصتين تستلزم الثانية. ولكن

لما كنت أترحح لنكار هذا اللزوم فلا بد إما أن أسلم بأن بعض الأشياء اللاهتقسمة هي مقادير ، وإما أن بعض الأشياء التي تكون أكبر أو أصغر من بعضها ليست مقادير . ولما كان لا مناص من اختيار أحد هذين الافتراقين عن الاستعمال الجارى فسأختار الأولى الذى أعتقد أنه أقل خطراً . وبهذا يكون تعريف المقدار على هذا النحو : المقدار هو أى شئ أكبر أو أصغر من شئ آخر . وقد يُظن أنه لا بد من ذكر « التساوى » ، مع فكرة الأكبر والأصغر فى تعريف المقدار . ومع ذلك سنرى أن ثمة سبباً يجعلنا نظن — مهما يظهر أن هذه النظرة متناقضة — أن ما يمكن أن يكون أكبر أو أصغر من حد ما لا يمكن البتة أن يكون مساوياً لأى حد كان ، والعكس بالعكس . وسيتحتاج هذا إلى تمييز ، تتضح ضرورته أكثر فأكثر كلما مضينا فى البحث ، بين نوع الحدود التى يمكن أن تكون متساوية ، والنوع الذى يمكن أن يكون أكبر أو أصغر . وسأسمى النوع الأول « كميات » ، والنوع الثانى « مقادير » . فالمسطرة التى نستعملها كمية ، وطولها مقدار . والمقادير أكثر تجريداً من الكميات ، فحين تكون كيتان متساويتين يكون لهما « نفس » المقدار . وأول نقطة لا بد من تقريرها هي ضرورة هذا التجريد .

١٥٢ — ولنضع المقادير جانباً بعض الوقت ريثما نبحث فى الكميات . الكمية هي أى شئ يقبل المساواة الكمية بشئ آخر . وينبغى التمييز بين المساواة الكمية وبين أنواع أخرى منه كالمساواة الحسابية ، أو المنطقية . وجميع أنواع المساواة تشترك فى خصائص ثلاث هي : أن تكون منعكسة ومتماثلة ومتعدية ، بمعنى أن أى حد له هذه العلاقة على الإطلاق فله هذه العلاقة مع نفسه . فإذا كان له هذه العلاقة مع ب ، كان ب له هذه العلاقة مع ا ؛ وإذا كان له هذه العلاقة مع ب ، وب مع ج ، كان ا له هذه العلاقة مع ج ^(١) .

(١) فيما يخص استقلال هذه الخصائص الثلاث انظر Peano, *Revue de Mathématique*, VII, p. 22 . وغاية الانعكاس ليست ضرورية تماماً . أما الضرورى حقاً والذي يصح فقط على التساوى الكمي (الأول وطلة على كل حال) فهو أن يوجد على الأقل زوج من الحدود له العلاقة المذكورة . فيترتب على الخاصيتين الأخريين أن كل حد من هذين الحدين له مع نفسه العلاقة المذكورة .

أما ما الذي يميز المساواة الكمية من الأنواع الأخرى ، وهل هذا النوع من المساواة يقبل التحليل فمسألة أخرى أكثر صعوبة يجب أن نشرع الآن في بحثها .

هناك بمقدار ما أعلم ثلاث نظريات أساسية عن المساواة الكمية :

١ - النظرية التقليدية التي تنكر المساواة كفكرة مستقلة وتفضي بالمساواة

بين حدين عندما ، وعند ما فقط ، يكون لهما نفس عدد الأجزاء .

٢ - وهناك ما يمكن أن يسمى بالنظرية النسبية للكمية . والتي بمقتضاها

تكون المساواة والأكبر والأصغر هي كلها علاقات مباشرة بين الكميات .

ولا حاجة لنا في هذه النظرية إلى المقدار ، لأن انطباق المقدار يستبدل به التماثل

والتملدي في علاقة المساواة .

٣ - وهناك النظرية المطلقة عن الكمية والتي فيها لا تكون المساواة علاقة

مباشرة بل تحلل إلى مقدار مشترك ، أي إلى انطباق العلاقة مع حد ثالث . وفي

هذه الحالة سيكون ثمة نوع خاص من علاقة الحد بمقداره ؛ ويكون بين مقدارين

من النوع نفسه علاقة الأكبر والأصغر ؛ على حين إنما تنطبق المساواة والأكبر

والأصغر على الكميات بفضل علاقتها بالمقادير . والفرق بين النظريتين الثانية

والثالثة هو نموذج للفرق الذي ينشأ في حالة كثير من المتسلسلات الأخرى ،

بخاصة بالنسبة للمكان والزمان . ومن ذلك يتضح أن الرأي الذي ننسب إليه بالغ

الأهمية .

١٥٣ - (١) بحثنا في الجزء الثاني من هذا الكتاب نوع المساواة القائمة

على وجود نفس العدد من الأجزاء . فإذا كان هذا حةاً هو معنى المساواة الكمية

فلن تأتى الكمية بأى فكرة جديدة . ولكن يمكن أن نبين فيما أظن أن الأكبر

والأصغر لهما مجال أوسع من الكل والجزء ، ولهما معنى مستقل . وتساق في ذلك

الحجج الآتية (١) يجب أن نسلم بالكميات اللانقسمة . (ب) حيث يكون

عدد الأجزاء البسيطة لامتناهياً فلا يوجد تعميم عن العدد يحقق النتائج المسلم بها

فيما يختص باللامساواة . (ج) بعض العلاقات يجب أن نسلم أنها كمية ، ولا

تتصور العلاقات أنها تقبل الانقسام . (د) وحتى إذا كان ثمة قبول للانقسام

فالبديهة القائلة بأن الكل أعظم من الجزء يجب أن نسلم بأهميتها لا على أنها ثمرة التعريف .

(١) إن بعض الكميات لا تنقسم . إذ من المسلم به عموماً أن بعض الأمور النفسانية كاللذة والألم كمية . وفي هذه الحالة لو كانت المساواة تعنى نفس عدد الأجزاء اللامتناسبة ، فلا بد لنا من اعتبار لذة ماً أو ألم ماً مشتملاً على مجموعة من الوحدات كلها كاملة البساطة وليست متساوية « فيما بينها » بأى معنى من معانى الدلالة ، لأن مساواة اللذات المركبة إنما تنشأ فقط على أساس هذا الفرض من عدد الوحدات البسيطة الداخلة في تركيبه ، فتكون المساواة غير متطبقة صورياً على اللذات غير المنتظمة . ولو سلمنا من جهة أخرى بأن اللذات تنقسم إلى « لا نهاية له بحيث لا تكون أى وحدة نأخذها غير منقسمة فيترتب على ذلك أن عدد الوحدات في أى لذة معلومة أمر تعسفي بحث ، ولو فرضنا وجود أى مساواة بين اللذات فعلينا أن نسلم بأن أى وحدتين قد تسميان متساويتين أو لا متساويتين تسمية ذات دلالة ^(١) . ومن ثمّ سنحتاج في المساواة إلى معنى ماً خلاف الانطباق فيما يختص بعدد الأجزاء . ويبدو مع ذلك أنه لا يمكن تجنب هذه النظرية الأخيرة ، إذ ليس ثمة أى سبب لاعتبار اللذات مشتملة على مجموع معين من الوحدات اللامتناسبة فقط ، بل أكثر من ذلك — لأننى أعتقد أن البحث الدقيق سيقنع أى شخص — أنه يمكن الحكم « دائماً » على لذتين حكماً له دلالتة بأنهما متساويتان أو لا متساويتان . ومهما تكن اللذتان صغيرتين فقولنا إنهما متساويتان لا بد دائماً أن يكون له دلالتة . ولكن طبقاً للنظرية التى أنازعها تبطل دلالة الحكم المذكور في الحال حين تكون اللذتان وحدتين لا منقسمتين ومثل هذه النظرية من الواضح أنها لا سند لها البتة ، ولا أعتقد أن الذين ^(٢)

(١) لن أستعمل أبداً لفظة : لا مساواة unequal لتعنى فقط : غير متساوى not equal ، بل لتعنى دائماً أكبر أو أصغر : أى : غير متساوى ، ولو كان الأمر خاصاً بنفس النوع من الكميات .

(٢) انظر مثلاً Bradley, "What do we mean by the Intensity of Psychical States ?

وأنظر برجه خاص ص ٥ Mind, N.S. Vol:IV;

تمسكوا بها ودافعوا عن المقدمات التي ترتبت عليها ، قد فعلوا ذلك عن وعي .

(ب) بعض الكميات تنقسم إلى ما لا نهاية له . ومهما يكن التعريف الذي نأخذه عن العدد اللانهائي ، فليست المساواة متساوقة مع الانطباق في عدد الأجزاء ، فأولا المساواة أو اللامساواة يجب دائماً أن تكون محدودة أي بالنسبة لكميتين من نفس النوع يجب أن يكون أحد الجوابين صحيحاً والآخر باطلاً ، ولو أنه ليس في مقدورنا غالباً أن نحكم بأيهما . ويرتب على ذلك أنه حيث تشتمل الكميات على عدد لانهائي من الأجزاء ، إذا كان لنا أن نرد المساواة أو اللامساواة إلى عدد من الأجزاء أصلاً ، فينبغي أن ترد إلى عدد من الأجزاء « البسيطة » ، لأن عدد الأجزاء المركبة التي قد تؤخذ في تركيب الكل أمرٌ تعسفي تماماً . ولكن المساواة كالحال في الهندسة مثلاً أضيق بكثير من الانطباق في عدد الأجزاء . وكما نعرف من « كانتور » فإن العدد الأصلي للأجزاء في أي جزءين متصلين من المكان هو نفس العدد ، بل إن العدد أو الصنف الترتيبي هو نفس العدد أو الصنف بالنسبة لأي طولين كيفما كانا . ولذلك فإذا كان ثمة أي لامساواة مكانية من النوع الذي تعودناه في الهندسة والنظر العادي فينبغي أن نبحث عن معنى مآ آخر عن المساواة يختلف عن ذلك الذي حصلنا عليه من عدد الأجزاء . قد يقال لي وقد بلغت هذه النقطة : إن المعنى في غاية الوضوح فقد حصلنا عليه من التراكب . وبغير أن أفصل فصلاً نهائياً في مناقشة هذا الموضوع الذي سوف أبحثه فيما بعد ألاحظ ما يأتي (١) أن التراكب ينطبق على المادة لا على المكان (ب) أنه كميّار للمساواة فإنه يفترض أن المادة المترابطة صلبة (ح) أن الصلابة تعني الثبات بالنسبة للخواص القياسية . وهذا يبين أننا لا نستطيع تعريف المساواة المكانية بالتراكب دون أن ندور في حلقة مفرغة . الحق المقدار المكاني مما لا يقبل التعريف كأى نوع آخر من اللامعرفات ، وفي هذه الحالة ، كالحال في جميع الحالات حيث يكون العدد لامتناهياً ، يكون عدد الأجزاء قاصراً تماماً حتى كميّار .

(ح) بعض العلاقات كميّات . والذي أوحى بذلك المناقشة المذكورة

عن المقادير المكانية حيث يكون من الطبيعي أن تقام المساواة على المسافات . ومع أن هذه النظرية كما سنرى فيما بعد ليست مناسبة تماماً فلنأخذها مع ذلك صحيحة في شطر منها . ويبدو أن هناك في بعض الأمكنة ، وبكل تأكيد في بعض التسلسلات (مثلاً في متسلسلة الأعداد المنطقية) علاقات كمية للمسافة بين الحدود المتعددة . وكذلك يبدو أن التشابه والاختلاف كيات . خذ مثلاً طيفين من اللون ، فقد يبدو مما لا شك فيه أن طيفين من اللون الأحمر أكثر شبهاً أحدهما بالآخر من طيف من اللون الأزرق ، ومع ذلك فلا توجد خاصية مشتركة في حالة لا توجد في الحالة الثانية أيضاً . و « الأحمر » إنما هو اسم جمع لسلسلة معينة من الأطياف ، ويرجع السبب الوحيد لإطلاق اسم الجمع على هذه السلسلة إلى التشابه الوثيق بين حدودها ، ولذلك لا يجب اعتبار « الأحمر » كخاصة مشتركة يرجع إليها تشابه طيفين من الأحمر . ولما كانت العلاقات لا يتصور حتى انقسامها ، فالأكبر والأصغر من العلاقات لا يمكن أن يعتمدا على عدد الأجزاء .

(د) وأخيراً يحسن أن نبحث مباشرة معاني الأكبر والأصغر من جهة ، والكل والجزء من جهة أخرى . ويبدو أن بديهية أقليدس وهي أن الكل أكبر من الجزء لها معنى غير منكور ، ولكن طبقاً للنظرية التقليدية للكمية لا تكون هذه البديهية سوى مجرد تكرار . ومرة أخرى نجد أن هذه النقطة متصلة بمسألة التراكب أيؤخذ على معنى المساواة ، أم على أنه مجرد معيار ، وفي هذه الحالة الأخيرة يجب أن يكون للبديهية معنى ، ولا يمكن أن نطابق بين المقدار وبين عدد الأجزاء ^(١) .

١٥٤ - (٢) يوجد إذن في الكمية شيء ماً بالإضافة إلى الأفكار التي ناقشناها حتى الآن ، وبقي علينا أن نميز بين النظرية النسبية للمقدار والنظرية المطلقة .

(١) وازن بين المناقشة المذكورة وبين

Meinong, *Über die Bedeutung des Weberschen Gesetzes*, Hanburgand Leipzig, 1896, especially Chap. 1, § 3.

النظرية النسبية تعتبر الكميات المتساوية لا على أنها حاصلة على أى خاصية مشتركة علاوة على الكميات غير المتساوية ، بل على أنها متميزة فقط بتبادل علاقة المساواة. فليس ثمة شيء ، كهذا الذى يسمى المقدار ، تشترك فيه الكميات المتساوية . ولا يجب أن نقول : هذا وذاك كلاهما طولها ياردة ، بل نقول : هذا وذاك كلاهما مساويان للياردة المعتمدة فى خزانة الدولة . والمساواة أيضاً هى علاقة مباشرة بين الكميات لا بين المقادير . فلا يوجد شيء بمقتضاه تميز مجموعة من الكميات المتساوية من مجموعة أخرى لا تساويها فيما عدا علاقة المساواة نفسها . وبناء على ذلك يجرى طريق التعريف كما يأتى : عندنا أولاً كيف أو علاقة كاللذة لها حالات متعددة تتخصص فى حالة كيف بالوضع الزمانى أو الزمكاني ، وفى حالة العلاقة بالحدود التى تقوم بينها . فلنبحث كميات من اللذة ، لتركز حولها المعانى . تشتمل الكميات من اللذة على مجرد مركبات من « لذة فى وقت ما » ، و « لذة فى وقت آخر » (وقد يمكن إضافة الموضوع إذا ظن أن للذات وضعاً فى المكان) . وعند تحليل لذة خاصة لسنا نجد طبقاً للنظرية العلاقية أى عنصر آخر ، ولكن إذا وازنا بين هذه اللذات الخاصة وجدنا أن أى لذتين منها لهما علاقة واحدة لا غير من هذه العلاقات الثلاثة وهى المساواة والأكبر والأصغر . أمّا لماذا تكون بعض اللذات لها هذه العلاقة ، وبعضها الآخر لها علاقة أخرى فمسألة من المستحيل نظرياً وبالدقة أن نعطي عنها جواباً ، إذ ليس هناك ، إلا إذا افترضنا ذلك ، أى نقطة اختلاف سوى الوضع الزمانى أو الزمكاني . والكميات المتساوية من اللذة لاتفق فى أى وجه تختلف فيه الكميات اللامتناهية ، كل ما فى الأمر أنه يحدث ، أن بعضها له هذه العلاقة وبعضها الآخر له علاقة أخرى .

ويجب التسليم بغرابة هذا الوضع للأمور ، ويزداد الأمر غرابة حين تفحص البديهيات اللامبرهنة التى تضطرننا النظرية العلاقية أن نفترضها . وهذه البديهيات هى ما يأتى (من حيث أن a و b و c كميات من نفس النوع) .

(١) $a = b$ ، أو a أكبر من b ، أو a أصغر من b .

(ب) إذا علمت $|$ فهناك دائماً $|$ قد تكون متطابقة مع $|$ بحيث تكون $| = |$.

(ج) إذا كانت $| = |$ ، إذن $| = |$.

(د) إذا كانت $| = |$ ، $| = |$ ، إذن $| = |$.

(هـ) إذا كانت $|$ أكبر من $|$ ، إذن $|$ أصغر من $|$.

(و) إذا كانت $|$ أكبر من $|$ ، $|$ أكبر من $|$ ، إذن $|$ أكبر من $|$.

(ز) إذا كانت $|$ أكبر من $|$ ، $| = |$ ، إذن $|$ أكبر من $|$.

(ح) إذا كانت $| = |$ ، $|$ أكبر من $|$ ، إذن $|$ أكبر من $|$.

ويترب على البديهيات (ب) ، (ج) ، (د) أن $| = |$ ^(١) . ومن (هـ) ،

(و) ينشأ أنه إذا كانت $|$ أصغر من $|$ ، $|$ أصغر من $|$ ، إذن $|$ أصغر من

$|$. ومن (ج) ، (هـ) ، (ح) أنه إذا كانت $|$ أصغر من $|$ ، $| = |$ ،

إذن $|$ أصغر من $|$. ومن (ج) ، (هـ) ، (ز) أنه إذا كانت $| = |$ ، $|$ ،

أصغر من $|$ ، إذن $|$ أصغر من $|$.

(بدلاً من بديهية (ب) يجب أن نضع هذه البديهية : إذا كانت $|$ كمية ،

إذن $| = |$. ويجب ملاحظة أن هذه البديهيات تؤدي إلى هذه النتيجة وهي أنه

في أى قضية يحكم فيها بالمساواة أو الزيادة أو النقصان ، فقد يمكن استبدال

الكمية المتساوية في أى مكان دون أن يتأثر صدق القضية أو كذبها . أضف إلى

ذلك أن القضية $| = |$ جزء أساسى فى النظرية . وتوحى أولى هاتين الحقيقتين لإحاطة

قوياً بأن ما يدخل فى القضايا الكمية ليس هو الكمية بالفعل بل خاصية معينة

تشارك فيها مع كميات أخرى متساوية . وهذا الفرض يكاد أن يكون مبرهنًا

عليه من الحقيقة الثانية $| = |$. ذلك أنه قد يسلّم بأن العلاقة الوحيدة المتماثلة

والمتعدية مما لا يقبل التحليل وبما يمكن أن يكون للحد مع نفسه هى علاقة

التطابق ، إن صح أن هذه حقاً علاقة . ومن ثم لا بد أن تكون علاقة المساواة

(١) وهذا لا ينتج من (ج) ، (د) وحدهما لأنهما لا يمكن أن يساوى $|$ دائماً .

انظر يائو المرجع السابق .

قابلة للتحليل . ولكن قولنا إن علاقتهما تقبل التحليل هو أن نقول إما أنها تشتمل على علاقتين أو أكثر بين حدودها ، ومن الواضح أن هذا ليس الحال ها هنا ، وإما أنها إذا كانت تصل بين حدين فهناك حد ثالث يتعلق به الحدان بحيث حين ترتبط تعطى العلاقة الأصلية . وهكذا فالحكم بأن | هو جد ب هو الحكم بوجود شخص ثالث هو ابن أو بنت | وأب أو أم ب . ومن ثم إذا وجب أن تحل المساواة فلا بد أن يتعلق الحدان المتساويان معاً بحد ثالث ما . ولما كان الحد قد يكون مساوياً لنفسه ، فأى حدين متساويين لابد أن يكون لهما « نفس » العلاقة بالحد الثالث المذكور . غير أن التسليم بذلك هو تسليم بالنظرية المطلقة للمقدار .

إن الفحص المباشر لما نعينه بقولنا إن حدين متساويان أو لا متساويان سيعزز الاعتراضات الموجهة للنظرية العلاقة . وقد يبدو من المستحيل القول بأن الكميات المتساوية ليس لها على الإطلاق شيء مشترك فوق ما تشترك فيه مع الكميات اللامتساوية . وفضلا عن ذلك فإن الكميات اللامتساوية ليس اختلافها مجرد اختلاف ، فهي مختلفة بهذه الطريقة المعينة بقولنا إن شيئاً أكبر والآخر أصغر . ومثل هذا الاختلاف يبدو غير مفهوم ألينة إلا إذا كان ثمة نقطة ما من فقط الاختلاف تخص الكميات اللامتساوية ، وتكون غائبة حيث تكون الكميات متساوية . وهكذا فإن النظرية العلاقة ، ولو أنها في الظاهر ليست متعارضة مع ذاتها على الإطلاق ، إلا أنها معقدة ومتناقضة . وسنجد أن كلا من التعقيد والتناقض بعيدان كلية عن النظرية المطلقة .

٥١٥ - (٣) وفي النظرية المطلقة هناك تصور واحد محدود فيما يتصل بمجموعة من الكميات المتساوية ، هذا التصور هو مقدار معين . وتتميز المقادير عن التصورات بأن لها علاقتي الأكبر والأصغر (أو على الأقل إحداهما) مع حدود أخرى هي من أجل ذلك مقادير أيضاً . ولا يمكن أن يكون مقداران متساويين لأن المساواة تتعلق بالكميات وتعرف بحصولها على « نفس » المقدار . وكل مقدار فهو تصور بسيط ولا معرف . وليس أى مقدارين فإن أحدهما

أكبر والآخر أصغر ، على العكس إذا علم أي مقدار فالأكبر أو الأصغر منه من المقادير تكون فصلاً معيناً محدوداً يكون أي اثنين فيه فأحدهما أكبر والآخر أصغر . ومثل هذا الفصل يسمى « نوع kind » المقدار . ومع ذلك فإن نوع المقدار قد يعرف كذلك بطريقة أخرى لا بد من ربطها مع الطريقة المذكورة سابقاً بديهية . وكل مقدار فهو مقدار « لـ » شيء ما — لذة ، مسافة ، مساحة ، إلخ — وله بذلك علاقة معينة بالذات مع الشيء الذي هو مقدار له . وهذه العلاقة خاصة جداً ويظهر أنها لا تقبل التعريف أكثر من ذلك . وجميع المقادير التي لها هذه العلاقة لشيء واحد بالذات (كاللذة مثلاً) فهي مقادير من نوع واحد ، وبهذا التعريف يصبح قولك إن مقدارين من نفس النوع فأحدهما أكبر والآخر أصغر بديهية .

١٥٦ — وقد يوجه اعتراض إلى النظرية السابقة على أساس علاقة المقدار بالشيء الذي هو مقدار له . ولتحدد بحثنا ناظرين إلى اللذة . إن مقداراً من اللذة هو قدر من اللذة أو كيت وكيت شدة اللذة . ويبدو من الصعب اعتبار ذلك كفكرة بسيطة كما تتطلب النظرية المطلقة ، إذ يبدو أن ثمة عنصرين هما اللذة والشدة . وليس يشترط أن تكون الشدة هي شدة اللذة ، وشدة اللذة متميزة عن اللذة المجردة . ولكن ما نحتاج إليه في تكوين مقدار معين من اللذة فليس الشدة بوجه عام بل شدة معينة خاصة ، وهذه الشدة النوعية لا يمكن أن تكون كذلك إلا بالإشارة إلى اللذة أو أي شيء ما آخر . فلا يمكن أن نقرر أولاً كم يكون عندنا ، ثم نقرر أيكون ذلك عن لذة أم كتلة . فالشدة النوعية لا بد أن تكون من نوع خاص . وهكذا فليست الشدة واللذة عنصرين مستقلين ومتوافقين في تعريف قدر معين من اللذة . وهناك أنواع مختلفة من الشدة ، ومقادير مختلفة في كل نوع ، ولكن المقادير في الأنواع المختلفة يجب أن تكون مختلفة . وبذلك يبدو أن العنصر المشترك المشار إليه بلفظة « الشدة » أو « المقدار » ليس شيئاً ما ذاتياً يمكن الكشف عنه بتحليل حد منفرد ، ولكنه مجرد حد على علاقة باللامساواة . وتعرف المقادير بأن لها هذه العلاقة ولا تتفق في أي شيء آخر بمقتضى

ما يتضح من التعريف . والفصل الذى تنتمى إليه جميع المقادير يُعرف ، كالجزم المتزوج من الجماعة ، بالعلاقات المتبادلة بين حدودها لا بعلاقة مشتركة مع حد خارجي — اللهم إلا إذا أخذت اللامساواة نفسها من حيث كذلك حدا مما يكون مجرد تعقيد لا لزوم له . ومن الضروري أن نبحث ما يمكن أن يسمى بسعة أو مجال العلاقة كما نبحت فصل التصور ، فالمقدار هو الفصل الذى يكون سعة اللامساواة . وهكذا فإن مقدار اللذة شيء مركب ، لأنه يجمع بين المقدار واللذة ، ولكن مقداراً خاصاً من اللذة ليس مركباً ، لأن المقدار لا يدخل في تصوره البتة . وإنما هو مقدار فقط لأنه أكبر أو أصغر من حد آخر معين ، وإنما كان مقداراً من « اللذة » بسبب علاقة معينة له مع اللذة . ومن الأسهل فهم هذا الأمر ، حيث يكون للمقدار الخاص اسم خاص ، فالإبرة مثلاً مقدار ، لأنها أكبر من القدم ، وهى مقدار للطول بسبب أنها تسمى طولاً ومأ . وهكذا فإن جميع المقادير تصورات بسيطة ، وتصنف إلى أنواع بسبب علاقتها مع كيف ماً أو علاقة ماً . أما الكميات التى هى حالات المقدار فإنها تخصص بوضع زمكانى أو (فى حالة العلاقات التى هى كميات) بالحدود التى تصل العلاقة بينها . والكميات ليست بالضبط أكبر أو أصغر لأن علاقته الأكبر والأصغر تقومان بين مقاديرها ، وهذه المقادير متميزة عن الكميات .

وإذا طبقنا هذه النظرية على إحصاء البديهيات الضرورية وحدنا تبسيطاً ملحوظاً ، فالبديهيات التى تظهر المساواة فيها أصبحت كلها مبرهنة ، وإنما نحتاج إلى ما أتى (حيث أن ل ، م ، ن) مقادير من نوع واحد :

- (أ) لا مقدار هو أكبر أو أصغر من نفسه .
 - (ب) ل أكبر من م أو ل أصغر من م .
 - (ج) إذا كانت ل أكبر من م ، إذن م أصغر من ل .
 - (د) إذا كانت ل أكبر من م ، م أكبر من ن ، إذن ل أكبر من ن .
- وهنا نرى أن البديهية الصعبة التى سميناها فيما سبق (ب) قد استبعدت

وكذلك البديهيات الأخرى الخاصة بالمساواة ، وما تبقى بعد ذلك فهو أبسط من المجموعة الأولى .

١٥٧ - الفصل بين النظرية المطلقة والنسبية يمكن أن يتم لأول وهلة بالرجوع إلى مبدأ عام معين واسع التطبيق أقترح أن أسميه مبدأ « التجريد » . ويقرر هذا المبدأ أنه حيث تكون للعلاقة - التي لها حالات - خاصيتا التماثل والتعدى ، فالعلاقة المذكورة ليست أولية بل تقبل التحليل إلى انطباق العلاقة مع حد آخر ، وأن هذه العلاقة المشتركة هي بحيث لا يكون ثمة إلا حد واحد لا غير على الأكثر يتعلق به حد معلوم مع هذه العلاقة ، ولو أن حدوداً كثيرة يمكن أن تتعلق بالحد المعلوم (أى أن العلاقة تشبه علاقة الابن بالأب ، فقد يكون للرجل عدة أبناء ولكن ليس له إلا أب واحد فقط) .

وهذا المبدأ الذى صادفناه من قبل عند الكلام عن الأعداد الأصلية قد يبدو معقداً بعض الشيء ، ومع ذلك فهو قابل للبرهان ، وعبرة عن مجرد تقرير دقيق لفرض شائع جداً . ومن المسلم به عموماً أن جميع العلاقات تحلل إلى تطابق أو تباين ما تحتويه . ومع أننى أرفض هذه النظرية بالكلية ، فإننى أحتفظ فيما يتصل بالعلاقات المماثلة المتعدية بالنظرية التقليدية معدلة بعض الشيء . وإذا عبرنا عن المسألة بعبارة أكثر استعمالاً قلنا إن مثل هذه العلاقات تقوم دائماً على حصولها على خاصية مشتركة ، ولكن الخاصية المشتركة ليست تصوراً بالغ الدقة ، ولن يحقق صورياً في معظم دلالاته العادية وظيفة تحليل العلاقات المذكورة . فالكيف المشترك بين حدين يعتبر عادةً "محمولاً" لهذين الحدين . ولكن مذهب الموضوع والمحمول بأسره باعتبار أنه الصورة الوحيدة لما يمكن أن تكون عليه القضايا ، والإنكار التام للحقيقة القصوى للعلاقات ، قد استبعدهما المنطق الذى نذهب إليه فى هذا الكتاب . وإذا استبعدنا لفظة « المحمول » ، فيمكن القول بأن أعم معنى يمكن أن يطلق على الخاصية المشتركة هو ما يأتى : الخاصية المشتركة بين حدين هي أى حد ثالث لكليهما معه علاقة واحدة وبالذات ؛ وبهذا المعنى العام يكون حصول الخاصية المشتركة مثلاً ،

ولكن ليس من الضروري أن يكون متعدداً، إذ لى يمكن أن تكون متعدية يجب أن تكون العلاقة بالخاصية المشتركة بحيث يمكن أن يكون حد واحد فقط على الأكثر هو خاصية أى حد معلوم ^(١). وهذا مثل علاقة كمية بمقدارها، أو حادثة بالزمن الذي تحدث فيه : فإذا علم حد واحد من العلاقة هو المتعلق به علم الحد الآخر، ولكن إذا علم المتعلق فلا يمكن بحال أن يعلم المتعلق به. من الممكن إذن إثبات أن حصول خاصية مشتركة من النوع المذكور يؤدي دائماً إلى علاقة متماثلة متعدية. أما ما يقرره مبدأ التجريد فهو العكس، أى أن مثل هذه العلاقات إنما تنشأ من الخصائص المشتركة من النوع السابق ^(٢). ويجب ملاحظة أن علاقة الحدود بما سميت خصائصها المشتركة لا يمكن أبداً أن تكون هي التي يدل عليها عادة بعلاقة الموضوع بالمحمول أو الفرد بفصله، إذ لا يمكن أن يكون للموضوع (طبقاً للنظرية المذكورة) محمول واحد فقط، ولا أن ينتمى الفرد لفصل واحد فقط. وعلاقة الحدود بخاصيتها المشتركة هي بوجه عام مختلفة في الأحوال المختلفة. وفي الحالة التي نبحثها، الكمية شيء مركب المقدار عنصر فيه، وعلاقة الكمية بالمقدار تعرف علاوة على ذلك بأن المقدار لا بد أن ينتمى لفصل معين هو فصل المقادير. يجب إذن أن نعتبر ما يأتي كبديهية (كالحال في الألوان) وهو أن مقدارين من نفس النوع لا يمكن أن يوجدوا معاً في موضع زمكانى واحد، أو يقوما كعلاقيتين بين نفس الزوج من الحدود. وهذا يحقق الانفراد المطلوب للمقدار. ومثل هذه الأحكام التركيبية غير المتوافقة، هي التي تؤدي إلى الأحكام السالبة، ولكن هذا الموضوع منطقي بحث، وليس من الضروري أن نتوسع فيه في هذا المجال.

(١) الدليل على هذه التقاضيا رياضي وهو يعتمد على متعلق العلاقات. انظر المؤلف مقالة

"Sur la Logique des Relations" R. d. M. VII, No. 2, § 1, Props 6.1, and 6.2.

(٢) يبرهن على هذا المبداً بيان أنه إذا كانت ع علاقة متماثلة متعدية، وكان ا حداً في

مجال ع، فإن ا له، مع فصل الحدود التي له معها العلاقة ع متبوعة في مجموعها، علاقة كثير بواحد وتكون متساوية مع ع حين تضرب علاقياً بمكسها وبذلك يمكن أن يتطابق المقدار مع فصل من كيات متساوية إذا اقتصرنا على الحجج الصورية.

١٥٨ - نستطيع الآن تلخيص المناقشة السابقة في بعض النتائج المختصرة :
 هناك أزواج معينة من العلاقات اللامعرفة تسمى « الأكبر » و « الأصغر » ،
 وهذه العلاقات لا متماثلة ومتعدية ، وهي غير متسقة بعضها مع بعضها الآخر .
 وكل منها عكس الآخر . بمعنى أنه حيث تقوم إحداها بين a ، b ، تقوم
 الأخرى بين b ، a . والحدود القابلة لهذه العلاقات هي « المقادير » . وكل
 مقدار له علاقة خاصة معينة مع تصور ما نعتبره بقولنا : إنه مقدار « a » ذلك
 التصور . ويقال عن مقدارين لهما هذه العلاقة لنفس التصور إنهما من نفس
 النوع ، وأن يكونا كذلك ، أى من نفس النوع ، هو الشرط الضروري والكافي
 لعلاقتهما الأكبر والأصغر . وعند ما يتخصص المقدار بوضع زمانى أو مكانى أو
 زمكانى ، أو عند ما ، في حالة كونه علاقة ، يتخصص بأن يأخذ في الاعتبار زوجاً
 من الحدود يقوم بينهما ، عندئذ يسمى المقدار المتخصص على هذا النحو « كمية » .
 ولا يمكن البتة أن يتخصص مقداران من نفس النوع بنفس التخصيص بالضبط .
 والكميتان الناتجتان من تخصص نفس المقدار يقال إنهما « متساويان » .
 وبذلك تكون اللامعرفات عندنا هي : (١) الأكبر والأصغر ، (٢) كل
 مقدار خاص . أما القضايا التي لا تقبل البرهان عندنا فهي :

- ١ - كل مقدار له إلى حد معين العلاقة التي تجعله من نوع معين .
- ٢ - أى مقدارين من نفس النوع فأحدهما أكبر والآخر أصغر .
- ٣ - أى مقدارين من نفس النوع إذا قبلا أن يشغلا المكان أو الزمان فلا
 يمكن أن يكون لهما نفس الوضع الزمكاني . وإذا كان المقداران علاقتهما
 فلا يمكن أن تقوم العلاقتان معاً بين نفس الزوج من الحدود .
- ٤ - لا مقدار أكبر من نفسه .

- ٥ - إذا كان a أكبر من b ، فإن b أصغر من a ، والعكس بالعكس .
- ٦ - إذا كان a أكبر من b ، و b أكبر من c ، إذن a أكبر من c ^(١) .

(١) ليس من الضروري في البديهيات (٥) ، (٦) أن نضيف قولنا : a ، b ، c
 من حيث إنها مقادير ، لأن علاقتهما الأكبر والأصغر المذكورتين هما اللتان تعرف المقادير ، ولذلك
 تكون الإضافة مجرد تكرار .

ومناك بديهيات خلاف ذلك تميز أنواعاً متعددة من المقادير ، ولكن البديهيات المذكورة يبدو أنها وحدها الضرورية للمقادير بوجه عام . ولا شيء من هذه البديهيات يعتمد بأي حال على العدد أو القياس . ولذلك لا داعي أن نجزع من المقادير التي تستعصى على القسمة أو القياس والتي سنجد لها في الباب القادم أمثلة عديدة .

ملاحظة على الباب التاسع عشر :

إن كتاب « مينونج » الذي يدور على قانون « فيبر » ، والذي أشرنا إليه من قبل ، من الكتب التي تعلمت منها الشيء الكثير ، والذي أتفق مع صاحبه إلى حد كبير ، ولهذا يبدو من المرغوب فيه أن أبرز موقفي من النقط التي اختلف فيها وإياه . ويبدأ ذلك الكتاب (بندا) بتمييز المقدار بأنه ذلك الذي يتحدد نحو الصفر . ومفهوم الصفر أنه نقي المقدار ، ثم يقرر بعد المناقشة هذه العبارة (ص ٨) : « المقدار ، أو ما له مقدار ، ما كان يسمح بتوليد الحدود بين نفسه وبين مقابله المناقض له » .

هل هذا القول يكون تعريفاً أو مجرد معيار فهو موضع شك ، ولكنه على أي الحالين يظهر لي مرفوضاً كميزة أساسية للمقدار . وتستمد هذه العبارة التأييد كما يبين « مينونج » (ص ٦ هـ) من التشابه مع « توقع الإدراك » ^(١) الذي قال به « كانط » ولكنها إذا لم أكن مخطئاً عرضة لاعتراضات خطيرة . فأولا جميع نظرية الصفر في غاية الصعوبة ، ويبدو أنها تابعة لا سابقة لنظرية المقادير الأخرى . واعتبار الصفر كقابل متناقض لمقادير أخرى أمر يبدو مضللاً . فلا بد أن تدل العبارة على الفصل الذي نحصل عليه من سلب فصل « المقادير من هذا النوع أو ذاك » ، ولكن من الواضح أن هذا لن ينتج الصفر من ذلك النوع من المقدار . وأي تفسير نعطيه لهذه العبارة فقد يبدو أنه يستلزم اعتبارنا الصفر لا على أنه

مقدار من النوع الذى يكون الصفر منه . ولكن فى تلك الحالة ليس الصفر أصغر من المقادير من النوع المذكور ، ويبدو أنه لا يوجد معنى خاص فى قولنا إن مقداراً أصغر يكون « بين » الصفر ومقدار أكبر . على أى حال إن معنى « بين » كما سنرى فى الجزء الرابع يتطلب علاقات لا متناهية بين الحدود التى هى موضع البحث . ويبدو أن هذه العلاقات فى حالة المقدار ليست شيئاً آخر سوى « الأكبر » و « الأصغر » ، وهما من أجل ذلك سابقان على « بَيْنِيَّة » المقادير ، وأبقى بالتعريف . وسأحاول فيما بعد أن أعطى ما أتصور أن يكون النظرية الصحيحة للصفر ، وعندئذ سيظهر مبلغ هذا الموضوع من الصعوبة . فليس من الحكمة إذن أن ندخل الصفر فى ابتداء بحث المقدار . وقد تثار اعتراضات أخرى : مثال ذلك أنه من المشكوك فيه هل جميع المقادير لها صفر ، وأنه فى الأنواع المتميزة من المقادير لا يكون للصفر أهمية ؛ وأنه بين المسافات حيث يكون الصفر مجرد تطابق لا تكاد توجد علاقة الصفر بالسلب أو الوجود كالحال فى الكيفيات مثل اللذة . ولكن السبب الرئيسى لا بد أن يكون التعاكس المنطقي الموجود فى إدخال « بين » قبل أن تتخصص أى علاقات لا متناهية يمكن أن تنشأ منها . وسنلخص هذا الموضوع فى الباب الثانى والعشرين .

الباب العشرون

مدى الكمية

١٥٩ - هذه هي الأسئلة التي ستناقشها في هذا الباب: ما أنواع الحدود التي تكون فصلا من الكميات من نوع واحد، بحكم علاقتها المشتركة مع عدد من المقادير؟ أيوجد لجميع مثل هذه الحدود أى شيء آخر مشترك؟ أئمة أى علامة تؤكد أن الحد يتعلق على هذا النحو بمجموعة من المقادير؟ ما أنواع الحدود التي تقبل الدرجة، أو الشدة، أو الأكبر والأصغر؟

والنظرية التقليدية تعتبر قبول الانقسام علامة مشتركة لجميع الحدود التي لها مقدار. وقد رأينا فيما قبل أنه ليس ئمة أساس «أولى» لهذه النظرية. وعلينا الآن أن نفحص المسألة استقرايًّا لنحصل على أكبر عدد ممكن من الأمثلة على الكميات التي لاشك فيها، وأن نبحت: أها جميعاً قابلية الانقسام أو أى علامة أخرى مشتركة.

أى حد يقبل درجة الأكبر والأصغر فإنه يشتمل على مجموعة من المقادير من نوع واحد داخلته تحته. ومن ثم كانت صيغة التفاضل في النحو دليلاً لأول وهلة على الكمية. فإذا كان هذا الدليل حاسماً فينبغى أن نسلّم أن جميع الكيفيات، أو يكاد يكون جميعها، تقبل المقدار. وعبارات المدح والذم التي يوجهها الشعراء لمحبوياهم تمدنا بصيغ التفضيل والأفضل من الصفات الشائعة. ولكننا نحتاج إلى شيء من الحذر حين نستعمل هذا الدليل القائم على طبيعة النمر فهناك دائماً فيما أظن «بعض» التفضيل الكمي حيث يكون هناك تفضيل وأفضل ولكنه في الغالب ليس تفضيلاً يتعلق بالكيف المشار إليه في النحو.

خذ مثلاً قول الشاعر :

« إيه أيتها الحورية
يا أحمر من الكرز
ويا أحلى من التوت
وأبهى من نور القمر »

فهذه أبيات تشتمل على ثلاثة تفاضلات ، أما فيما يختص بالحلاوة والبهاء فإنني أعتقد أننا لزاء تفاضل كمي أصلي . أما فيما يختص بالاحمرار فقد يشك في ذلك . فالتفاضل هنا - وعلى العموم حيث يتعلق الأمر بالألوان - لا يشير فيما أظن إلى لون معلوم بمقدار ما يشير إلى تشابه بمستوى من اللون . ومن المفروض أن ترتب الأطياف المختلفة من اللون في متسلسلة بحيث يكون الاختلاف في الكيف أكبر أو أصغر كما تكون المسافة في المتسلسلة أكبر أو أصغر . وأحد هذه الأطياف هو « الأحمرار » ، المثالي ، وتسمى الأطياف الأخرى أكثر أو أقل احمراراً بحسب ما تكون أقرب أو أبعد من هذا الطيف shade في المتسلسلة . وينطبق نفس هذا التفسير فيما أعتقد على مثل هذه الحدود مثل « أكثر بياضاً » ، وأكثر سواداً ، وأكثر احمراراً » . فالكمية الصحيحة الداخلة ها هنا يبدو أنها في جميع هذه الأحوال علاقة مآ هي علاقة التشابه . ولا ريب أن الاختلاف بين طيفين من اللون هو اختلاف في الكيف لا مجرد اختلاف في المقدار . فعند ما نقول إن شيئاً أحمر من شيء آخر لا نستتج أن الاثنين لهما نفس الطيف . ولو لم يكن هناك فرق في الطيف فأكبر الظن أننا كنا نقول إن أحدهما ألع من الآخر ، وهو نوع مختلف كل الاختلاف من التفاضل . ولكن على الرغم من أن الفرق بين طيفين هو فرق في الكيف ، فإن هذا الفرق في الكيف بمقدار ما يبينه الترتيب المتسلسل هو نفسه فرق يقبل التدرج . ويبدو أن كل طيف من اللون بسيط ولا يقبل التحليل ، ولكن الألوان المتجاورة في الطيف spectrum هي بلا نزاع أكثر تشابهاً من الألوان المتباعدة . وهذا هو الذي يعطى الاتصال للألوان . ونحن نقول إن هناك دائماً بين طيفين من اللون ١ و ٢ لوناً ثالثاً هو ٣ ، وهذا يعني أن

ح يشبه | أو ب أكثر مما يمكن القول به عن ب أو ا . ولولا مثل هذه العلاقات من التشابه المباشر ما استطعنا أن نرتب الألوان في متسلسلات . ويجب أن يكون التشابه مباشراً ما دامت جميع أطراف الألوان لا تقبل التحليل مما يظهر من أى محاولة للوصف أو التعريف ^(١) . وبذلك نحصل على حالة لا شك فيها من العلاقات التى لها مقدار . والتباين أو التشابه بين لونين هو علاقة ، وهو مقدار ، لأنه أكبر أو أصغر من تباين أو تشابه آخر .

١٦٠ - لقد أطلت بحث هذه الحالة من الألوان لأنها مثال واحد على فصل في غاية الأهمية . وعند ما يمكن أن يرتب أى عدد من الحدود في متسلسلة ، فكثيراً ما يحصل أن أى حدين من هذه الحدود لهما علاقة قد تسمى بوجه عُم « مسافة » distance ، وهذه العلاقة تكفى في توليد ترتيب متسلسل ، وتكون دائماً بالضرورة مقداراً . وفي مثل هذه الأحوال كلها إذا كانت حدود المتسلسلة أسماء وكان لهذه الأسماء تفاضل ، فالمتفاضلات تدل لا على أكثر من الحد المذكور بل على التشابه الأكثر بذلك الحد . فإذا فرضنا أن متسلسلة الزمن من المتسلسلات التى فيها مسافة ، فحين يقال عن حادثة إنها أحدث من أخرى ، فالقصد أن مسافتها من الحاضر كانت أقل من الأخرى . وهكذا فإن الحدائق ليست بذاتها صفة للزمن أو الحادثة . فإفاضل بينه كمياً في مثل هذه الأحوال هى علاقات لا كفيات . وحالة الألوان مناسبة للتوضيح ، لأن للألوان أسماء والاختلاف بين لونين يسلم به عادة أنه كفى . ولكن المبدأ واسع التطبيق جداً . أما أهمية هذا الفصل من المقادير ، والضرورة القصوى للوصول إلى أفكار واضحة عن طبيعتها ، فسيتضح ذلك أكثر فأكثر كلما مضينا في البحث . وفلسفة الزمان والمكان بأسرها ، والمذهب المسمى بمذهب المقادير الممتدة ، يعتمدان على فهم واضح للمتسلسلات والمسافة .

(١) فيما يخص موضوع تشابه الألوان انظر Meinong, "Abstrahiren und Verleichen," *Zeitschrift f. Psych. u. Phys. d. Sinnesorgane*, Vol. XXIV, p. 72 ff. ولست متأكداً أننى أتفق مع جميع حجة مينونغ ، ولكن النتيجة العامة التى ينتهى إليها يظهر لى أنها صحيحة وأنها مبدأ منطقي هام .

يجب التمييز بين المسافة وبين مجرد الاختلاف. أو التشابه ، فالمسافة إنما تقوم بين حدود في متسلسلة ، وهي على صلة وثيقة بالترتيب ، ويلزم عنها أن الحدود التي تقوم بينها لها اختلاف أقصى وبسيط وليس من جنسها ، يقبل التحليل إلى مكونات . ويلزم عنها كذلك أن هناك انتقالا متصلا ، قليلا أو كثيراً ، خلال حدود أخرى تنتمي إلى نفس المجموعة ، وذلك من أحد الحدود البعيدة إلى الآخر . ومجرد الاختلاف « بذاته » يظهر أنه « القدر الأدنى » للعلاقة من حيث الشرط السابق لجميع العلاقات تقريباً . وهي دائماً مطلقة وغير قابلة للدرجات . وفضلا عن ذلك فإنها تصل بين أى حدين مهما يكنوا ، ومن العسير تمييزها من الحكم بأنهما اثنان . ولكن المسافة إنما تقوم بين أعضاء متسلسلة معينة ، ووجودها هو عندئذ أصل المتسلسلة . وهي علاقة نوعية ، ولها وجهة *sense* إذ يمكن أن نميز المسافة من a إلى b من المسافة من b إلى a . وهذه العلامة الأخيرة وحدها تكفي للتمييز بين المسافة وبين مجرد الاختلاف .

وقد يفترض أنه في المتسلسلة التي يكون فيها مسافة فإنه على الرغم من أن المسافة a b يجب أن تكون أكبر أو أصغر من a > فإن المسافة b > لا تحتاج أن تكون أكبر أو أصغر من a > . مثال ذلك : من الواضح أن الفرق بين اللذة المستمدة من ٥ جنيهات و ١٠٠ جنيه أكبر من الفرق بين اللذة المستمدة من ٥ جنيهات و ٢٠ جنيه . ولكن أهنالك حاجة إلى وجود مساواة أو لامساواة بين الفرق بين جنيه و ٢٠ جنيه ، والفرق بين ٥ جنيهات و ١٠٠ جنيه ؟ يجب أن يكون جواب هذا السؤال بالإيجاب ، لأن a > أكبر أو أصغر من b > ، و b > أكبر أو أصغر من b > ، إذن a > ، b > وكذلك b > ، b > هي مقادير من نفس النوع . إذن a > ، b > مقداران من نفس النوع ، وإذا لم يكونا متطابقين ، فأحدهما يجب أن يكون الأكبر والآخر الأصغر . إذن حين تكون هناك مسافة في متسلسلة فأى مسافتين منهما متفاضلتان كيا .

ويجب ملاحظة أن جميع المقادير التي من نفس النوع تكون متسلسلة ،

وأن مسافاتنا من أجل ذلك ، إذا كان لها مسافات ، فهي مرة أخرى مقادير . ولكن لا يجب افتراض أنها على العموم يمكن الحصول عليها بالطرح ، أو أنها من نفس النوع كالمقادير التي تعبر عن الفرق بينها . ويعتمد الطرح كقاعدة على قبول الانقسام ، ولذلك فهو على العموم لا ينطبق على الكميات اللانقسمة . وهذه النقطة مهمة وستناقشها تفصيلاً في الباب المقبل .

وهكذا فإن القرب والمسافة علاقتان لهما مقدار ، فهل توجد هناك علاقات أخرى لها مقدار ؟ هذا شيء فيما أعتمد موضع شك ^(١) . على الأقل لم يبلغ علمي مثل أى تلك العلاقة الأخرى ، ولو أني لا أعرف أى طريقة لا تثبت وجودها .

١٦١ — وهناك فصل صعب من الحدود يعتبر عادة على أنه فصل مقادير ، ويستلزم في الظاهر علاقات ولو أنها ليست بكل تأكيد دائماً علاقة . تلك هي المعاملات التفاضلية مثل السرعة والعجلة ، ويجب أن ننزلها في اعتبارنا في كل محاولة للتعميم فيما يخص بالمقدار ، غير أنه نظراً لتعقيدها فإنها تحتاج إلى مناقشة خاصة ، هي التي ستقدمها في الجزء الخامس من هذا الكتاب ، وسرى عندئذ أن المعاملات التفاضلية ليست أبداً مقادير ، بل هي أعداد حقيقية فقط أو قطاعات في متسلسلات معينة .

١٦٢ — جميع المقادير التي بحثناها حتى الآن كانت إن شئت الدقة لانقسمة ، وعندئذ يبرز هذا السؤال : أتوجد مقادير منقسمة ؟ وهنا أحسب أنه لا بد من هذا التمييز . فالمقدار في أساسه واحد وليس كثيراً ، وبذلك لا مقدار يعبر عنه تعبيراً صحيحاً كعدد من الحدود . ولكن ألا يمكن أن تكون الكمية التي لها مقدار جملة من الأجزاء ، وأن يكون المقدار مقدار قابلية للانقسام ؟ إذا كان الأمر كذلك ، فكل كل يشتمل على أجزاء فهو حد مفرد له خاصية

الانقسام . وكلما كانت الأجزاء التي يتكون منها أكثر كانت قابليته للانقسام أكبر . وطبقاً لهذا الفرض ، الانقسام مقدار يمكن أن نحصل منه على درجة أكبر أو أصغر . ودرجة الانقسام تناظر بالضبط في الكلات المتناهية عدد الأجزاء . ولكن ولو أن الكل القابل للانقسام فهو منقسم بالطبع ، إلا أن انقسامه ، الذي هو وحده مقدار على وجه الدقة ، ليس بالضبط منقسماً . لأن قابلية الانقسام لا تشمل بذاتها على أجزاء ، بل فقط خاصية أن يكون لها أجزاء . ومن الضروري للحصول على الانقسام أن نلترم حين نأخذ الكل أنه « واحد » ، وأن نعتبر الانقسام على أنه صفة له . وهكذا فع أنه في هذه الحالة يكون عندنا قياس عددي ، وجميع النتائج الرياضية للقسمة ، إلا أنه من الناحية الفلسفية لا يزال المقدار الذي نبحث فيه لا منقسماً .

وهناك صعوبات مع ذلك في الطريقة التي نسلم بها أن الانقسام هو كنوع من المقدار . إذ يبدو أن الانقسام ليس خاصية لكل بل مجرد علاقة للأجزاء . ومن الصعب أن نقرر شيئاً بخصوص هذه النقطة ، ولكني أظن أننا يمكن أن نقول الشيء الكثير في تأييد الانقسام كصفة بسيطة . فالكل له علاقة معينة يمكن أن نسميها تيسيراً علاقة التضمن لجميع أجزائه . وهذه العلاقة هي سواء أكانت الأجزاء كثيرة أم قليلة ، والذي يميز الكل من الأجزاء الكثيرة هو أن له مثل هذه العلاقات الكثيرة من التضمن . ولكن يبدو من الحكمة افتراض ، أن الكل المشتمل على أجزاء كثيرة يختلف عن الكل ذي الأجزاء القليلة من بعض الوجوه الذاتية . الواقع يمكن أن ترتب الكلات في متسلسلة تبعاً لحصولها على أجزاء أكثر أو أقل ، وهذا الترتيب المتسلسل يلزم عنه كما رأينا من قبل متسلسلات معينة من الخصائص تختلف قليلاً أو كثيراً بعضها من بعضها الآخر ، وتتفق حين يكون لكلين نفس عدد الأجزاء المتناهية ولكنها متميزة عن عدد الأجزاء في الكلات المتناهية . ولا يمكن أن تكون هذه الخصائص شيئاً آخر سوى درجة الأكبر والأصغر من الانقسام . وهكذا فإن مقدار الانقسام « يظهر » أنه خاصية بسيطة للكل المتميز عن عدد الأجزاء التي يشتمل الكل عليها ، ولكنه

يرتبط معها بشرط أن يكون هذا العدد متناهياً . فلو سلمنا بهذه النظرية فقد نسلم بأن يبقى الانقسام كفصل من المقادير التي تقبل القياس العددي ، ولكنه غير منقسم . وفي هذا الفصل يجب علينا أن نضع الأطوال والمساحات والأحجام ولكن لا المسافات . وسنرى مع ذلك فيما بعد أن انقسام الكلات اللانهائية ، بالمعنى الذي لا تقاس فيه هذه الكلات بالأعداد الأصلية ، يجب أن يشتق من علاقات بطريقة شبيهة بتلك التي تشتق بها المسافة، ويجب أن يكون حقاً خاصة للعلاقات (١) .

وهكذا يظهر أن جميع المقادير على أى حال لامتنعمة . وهذه علامة واحدة مشتركة تملكها جميعاً ، وبمقدار علمي هي العلامة الوحيدة التي يجب إضافتها لتلك التي أحصيناها في الباب التاسع عشر . وفيما يختص بمدى الكمية فقد يبدو أنه لا يوجد قضية عامة أكثر من ذلك . وهناك عدد كبير جداً من الحدود البسيطة غير العلاقية التي لها مقادير ، باستثناء الألوان والنقط واللحظات والأعداد. ١٦٣ - وأخيراً من المهم أن نتذكر أنه طبقاً للنظرية التي أخذنا بها في الباب التاسع عشر ، فالمقدار المعلوم من نوع معلوم هو تصور بسيط له مع نوعه علاقة شبيهة بعلاقة الاستغراق في الفصل . وعند ما يكون النوع نوعاً من الموجودات كاللذة ، فالذي يوجد بالفعل ليس أبداً هو النوع بل مقادير مختلفة خاصة من النوع . فاللذة إذا أخذت مجردة لا توجد ، ولكن يوجد منها مقادير متعددة . وهذه الدرجة من التجريد جوهرية في نظرية الكمية ، فلا بد أن يكون هناك أشياء لا يفرق بعضها عن بعضها الآخر إلا في المقدار . وقد تظهر الأسس التي تقوم عليها هذه النظرية بشكل أوضح عند فحص آخر لهذه الحالة فيما بعد .

ولنبداً بقضية بنتام المشهورة : « إذا كانت كمية اللذة متساوية ، فإن المسار الذي نعلق عليه الصورة في الحائط يساوي قصيدة من الشعر » . هنا نجد أن الفرق الكيفي للذات هو جوهر الحكم بالذات ، ولكن كي نستطيع القول إن

كميات. اللة متساوية يجب أن نتمكن من تجريد الفروق الكيفية بحيث نترك مقداراً معيناً من اللة . فإن صح هذا التجريد فليس يجب أن يكون الفرق الكيفي فرقاً في الكيف حقاً ، بل فقط فرق في العلاقة بمحدود أخرى كالفرق في العلاقة السببية ، مثل هذه الحالة . ذلك أننا لا نوازن بين جميع حالات اللة ، بل فقط كيفية لذتها — كما توضح بحق صورة الحكم . فإذا فرضنا أن مقدار اللة ليس شيئاً منفصلاً فستنشأ صعوبة ، هي أن مجرد عنصر اللة يجب أن يكون متطابقاً في الحالتين حيث نحتاج إلى فرق محتمل في المقدار . ومن أجل ذلك لا يمكننا أن نذهب إلى أن الكل المخصوص وحده هو الذي يوجد ، وأن أى جزء منه عبارة عن تجريد ، ولا أن ما يوجد هو للة مجردة وليست مقداراً من اللة . ولا كذلك يمكن أن نقول : إننا نجرد من كل الحالات هذين العنصرين وهما المقدار واللة إذ عندئذ لا نحصل على مفاضلة كمية بين اللذات . فقد تتفق الحالتان في أنهما لذتان وفي أنهما مقداران ، ولكن هذا لا يعطينا مقداراً من اللة ، وقد تعطى مقداراً للحالتين ككل وهو ما لا نسلم به . فلا يمكن إذن أن نجرد المقدار عموماً من الحالات لأنها ككالات ليس لها مقدار . وقد رأينا أننا لا يجب أن نجرد اللة الخالصة إذا كان لنا أن نحصل على أى احتمال لمقادير مختلفة . وهكذا فإ يجب أن نجرده هو مقدار من اللة ككل ، وهذا لا يجب أن يحلل إلى مقدار وإلى للة ، بل يجب أن يجرد ككل . ثم مقدار اللة يجب أن يوجد كجزء من كل الحالات اللذيلة ، إذ إنما تتيسر المفاضلة الكمية حيث لا يوجد فرق إلا فرق المقدار على الأكثر . وبذلك تؤيد مناقشة هذه الحالة الخاصة النظرية القائلة بأن كل مقدار فهو غير قابل للتحليل وله فقط العلاقة ، الشبيهة بعلاقة الاستغراق في الفصل ، بتلك الصفة المجردة أو العلاقة التي هي مقدار لها .

وإذ قد رأينا أن جميع المقادير فهي غير منقسمة فعلياً أن نبحث بعد ذلك إلى أى حد يمكن أن تستخدم الأعداد للتعبير عن المقادير ، وطبيعة القياس وحدوده .

الباب الحادى والعشرون

الأعداد كتعبير عن المقادير : القياس

١٦٤ - من الفروض التى ينهب إليها المثقفون من أصحاب الفطرة السليمة أن مقدارين من نفس النوع فيجب أن يقبلا المفاضلة العددية . فالتاس يميلون إلى القول إنهم أصبح أو أسعد ثلاثين في المائة عما كانوا عليه دون أن يخطر ببالهم الشك في أن مثل هذه العبارات تخلو من المعنى . وغرضنا في هذا الباب أن نوضح المقصود من القياس ، وما فصول المقادير التى ينطبق عليها ، وكيف يطبق على تلك الفصول .

إن قياس المقادير في أهم معنى له هو أى طريقة يقوم بها تناظر وحيد ومنعكس بين جميع أو بعض المقادير من نوع مآ ، وبين جميع أو بعض الأعداد الصحيحة أو المنطقة أو الحقيقية بحسب الأحوال . (قد يظن أن الأعداد المركبة يجب أن تدخل في هذا ، ولكن ما يمكن « فقط » أن يقاس بالأعداد المركبة هو في الواقع دائماً جملة من المقادير من أنواع مختلفة لا مقدار منفرد .) وبهذا المعنى العام يتطلب القياس علاقة واحد بواحد بين الأعداد والمقادير المذكورة - علاقة قد تكون مباشرة أو غير مباشرة ، هامة أو تافهة تبعاً للظروف . والقياس بهذا المعنى يمكن أن ينطبق على عدد كثير جداً من فصول المقادير ؛ وينطبق القياس كما سنرى على فصلين كبيرين هما المسافات والانقسامات بمعنى أكثر أهمية وأوثق صلة .

وفى مختص بالقياس على المعنى الأهم فليس ثمة إلا اليسير جداً من القول يمكن أن نقوله . ما دامت الأعداد تكون متسلسلة ، وكان كل نوع من المقادير يكون كذلك متسلسلة فمن المستحسن أن يكون ترتيب المقادير المقيسة مناظراً

لترتيب الأعداد ، وبمعنى آخر تكون جميع علاقات « بين » هي نفسها للمقادير ومقاييسها . فحيثما يكون ثمة صفر ، فن المستحسن أن يقاس بالعدد صفر . هذه الشروط وغيرها مما يحققها القياس إذا أمكن ، قد توضع ، ولكنها ذات أهمية عملية أكثر منها نظرية .

١٦٥ — هناك رأيان ميتافيزيقيان عامان ، وبين أي رأى منهما إذا سلمنا به أن « جميع » المقادير تقبل نظرياً القياس بالمعنى المذكور . وأول الرأيين هو النظرية القائلة بأن جميع الحوادث إما أن تكون حوادث في المتسلسلة السببية الديناميكية ، وإما أن يكون بينهما ترابط . وفيما يختص بما يسمى بالصفات الثانوية فإن هذه النظرية قد بحثها العلوم الطبيعية بحثاً واسعاً حتى انتهت إلى معظم ما يسمى بالصفات الكمية المفرطة التي تظهر في المكان مع القياس المكاني ، ومن ثمّ القياس العددي . أما فيما يختص بالكميات النفسية فالنظرية المذكورة هي التوازي النفسطبيعي . وهنا نجد أن الحركة المرتبطة مع أي كمية نفسية تقدم دائماً من الناحية النظرية وسيلة لقياس تلك الكمية . أما الرأي الميتافيزيقي الآخر الذي يُغضى إلى القابلية العامة للقياس فهو رأي أوحى به ما ذهب إليه كانط في قوله « بتوقعات الإدراك »^(١) ، أي أنه بين المقادير المفرطة هناك زيادة تصحب دائماً بزيادة في الواقع . ويبدو أن الواقع في هذا الصدد مرادف للوجود . ومن ثمّ يمكن أن نعبّر عن المذهب كما يأتي : الوجود نوع من المقدار المفرط الذي حيث يوجد مقدار أكبر منه فهناك دائماً وجود أكثر مما إذا كان مقدار أصغر هو الموجود . (ليس من المحتمل أن هذا هو بالضبط مذهب كانط وأنها على الأقل نظرية معقولة) . وفي هذه الحالة ما دامت حالتان من نفس المقدار (مثل كيتين متساويتين) يجب أن يكون لهما من الوجود أكثر مما لواحد فيترتب على ذلك أنه إذا كان مقدار واحد من نفس النوع يمكن أن نجد أن له نفس القدر من الوجود كالكميتين المتساويتين معاً ، إذن ذلك المقدار يمكن أن يسمى ضعف كل من

(١) Reine Vernunft, ed. Hart. (1867), p. 160 — عبارة الطبعة الأولى توضح

المذهب الذي أشير إليه أفضل من الطبعة الثانية ، انظر مثلاً Erdmann's Edition, p. 161.

الكيميتين المتساويتين . وبهذا السبيل تصبح جميع المقادير المفرطة من الناحية النظرية قابلة للقياس . ومن التناقض التسليم بأن لهذه الطريقة أى أهمية عملية ، ولكنها قد تعين فى ظهور معنى مثل هذه العبارة « سعيد مرتين » . إنها تعالج معنى مثلاً حين نقول إن طفلاً يحصل على لذة من قطعة شوكولاته تساوى نقطتين من حامض . وعلى أساس مثل هذه الأحكام يمكن بناء حساب اللذة من الناحية النظرية .

وثمة ملاحظة أخرى عامة على شىء من الأهمية . إذا سلمنا بأن جميع متسلسلات المقادير هى إما متصلة بحسب معنى كانتور ، وإما شبيهة بمتسلسلات يمكن انتخابها من متسلسلات متصلة ، فمن الممكن نظرياً إذن أن نربط أى نوع من المقادير بجميع أو بعض الأعداد الحقيقية بحيث يناظر الصفر والمقادير الأكبر الأعداد الأكبر . ولكن إذا اشتملت أى متسلسلة من المقادير — دون أن تكون متصلة — على متسلسلة متصلة ، فإن مثل هذه المتسلسلة من المقادير لن تقبل بالضبط نظرياً القياس بواسطة الأعداد الحقيقية ^(١) .

١٦٦ — ولنترك الآن هذه العموميات الغامضة بعض الشئ ، ولنشرع فى بحث معنى القياس الأشيع استعمالاً والمحسوس . إن ما نحتاج إليه هو معنى ما نقول بمقتضاه إن مقداراً هو ضعف مقدار آخر . وفى الأمثلة المذكورة سابقاً استمد هذا المعنى من الترابط بالمقادير الزمكانية أو بالوجود . وهذا يفترض أن فى هذه الأحوال قد وجد معنى للعبارة . ومن ثمّ كان القياس يتطلب فى بعض الأحوال ضرورة وجود معنى ذاتى لهذه القضية : « هذا المقدار ضعف ذلك » . (سيظهر كلما مضينا فى البحث كيف يكون المعنى ذاتياً) وما دمتا نعتبر الكميات منقسمة بالطبع ، فهناك معنى كامل واضح للمثل هذه القضية : « المقدار أ ضعف ب حين يكون مقداراً للكميتين معاً ، لكل منهما المقدار ب » . (يجب ملاحظة أن قسمة « مقدار » إلى جزئين متساويين أمر

(١) انظر الجزء الخامس ، الباب الثالث والثلاثين .

مستحيل دائماً إذ لا يوجد ما تقول عنه مقادير متساوية) . ومثل هذا التأويل ينطبق على مقادير الانقسام . ولكن حيث قد سلمنا بمقادير أخرى ، فيجب أن نبحث لما عن تأويل مختلف (إن وجد) . ولنبدأ بفحص حالة قبول الانقسام ثم تنتقل بعد ذلك إلى الحالات الأخرى التي يكون القياس فيها ممكنات ذاتياً .

١٦٧ - انقسام الكل المنتهى مترابط مباشرة وبالطبع بعدد الأجزاء البسيطة في الكل . وفي هذه الحالة مع أن المقادير قاصرة عن الجمع من النوع المطلوب ، فمن الممكن جمع الكميات بالطريقة التي شرحناها في الجزء الثاني . وجمع مقادير انقسام ينتج فقط مقدارين لا مقداراً جديداً . ولكن جمع كميتي انقسام ، مثل كليين ، ينتج كلا جديداً مفرداً ، بشرط أن يكون الجمع من النوع الذي ينتج عن الجمع المنطقي باعتبار الفصول هي الكلات المكوّنة من حدودها . وهكذا هناك معنى معقول في قولنا إن مقدار انقسام هو ضعف مقدار آخر ، وذلك حين ينطبق على كل يشتمل من الأجزاء على الضعف . ولكن في حالة الكلات اللامتناهية لا يكون الأمر بأى حال بهذه البساطة . فها هنا عدد الأجزاء البسيطة (بمعنى العدد اللامتناهى التي اكتشفناها حتى الآن) قد تكون متساوية بغير مساواة في مقدار الانقسام . فنحن في حاجة هنا إلى طريقة لا ترجع إلى الأجزاء البسيطة . وفي المكان الفعلي عندنا أحكام مساواة مباشرة بالنسبة لكليين لامتناهيين . وعند ما نحصل على مثل هذه الأحكام يمكننا أن نعتبر مجموع هـ من الكلات المتساوية كعدد هـ لكل منها ، لأن جمع الكلات لا يتطلب تناهياً . وبهذه الطريقة يصبح من الممكن المفاضلة العددية بين بعض الأزواج من الكلات . وبمقتضى الطرق الشائعة المعروفة جيداً ، بطريقة القسمة المستمرة وطريقة النهايات ، يمكن تطبيق ذلك على جميع أزواج الكلات التي هي بحيث يمكن المفاضلة المباشرة . وبدون هذه المفاضلات المباشرة ، وهي الضرورية منطقياً وفلسافياً على حد سواء ^(١) ، لا يمكن عمل أى

(١) انظر مينيج ، المرجع السابق ، ص ٦٣ - ٦٤ .

شيء . فنحن نرتد دائماً في آخر الأمر إلى الحكم المباشر بأن مسطرتنا لم تغير حجمها كثيراً في أثناء القياس ، وهذا الحكم سابق على نتائج العلم الطبيعي فيما يختص بالحد الذي تغير الأجسام بالفعل أحجامها . أما حيث تكون المفاضلة المباشرة مستحيلة نفسانياً ، فقد يمكن نظرياً أن نضع بدل ذلك أوجهاً مختلفة منطقية من القياس لا تعطى خاصية عن الكل المتقسم بل عن علاقة ما أو فصل من العلاقات يشبه كثيراً أو قليلاً تلك التي تقوم بين النقط في المكان . أما أن الانقسام بالمعنى المطلوب في المساحات والأحجام ليس خاصية كل ، فينتج من أنه (وهو ما سنثبت في الجزء السادس) بين النقط في مكان هناك دائماً علاقات تولد مكاناً مختلفاً . وهكذا فإن مجموعتين من النقط التي بالنسبة لمجموعة من العلاقات تكون مساحات متساوية وتكون بالنسبة لمجموعة أخرى مساحات غير متساوية ، أو تكون بالنسبة لواحدة مساحة وللأخرى لا خطأً أو حجماً ، فلو كان الانقسام بالمعنى المذكور خاصية ذاتية للكالات لكان ذلك مستحيلاً . ولن نستطيع مناقشة هذا الموضوع "مناقشة كاملة حتى نعرض للهندسة القياسية .

وحيث تكون المقادير انقسامات فإن الأعداد لا تقيسها فقط ، بل الفرق بين عددي القياس مع بعض القيود يقيس مقدار الفرق بين الانقسامات (والفرق هنا بمعنى اللاتشابه) : فإذا ثبت أحد المقدارين فالفرق بينه وبين الآخر يزيد كلما زاد فرق عددي القياس ، لأن هذا الفرق يعتمد على الفرق بين عدد الأجزاء . ولكن لا اعتقد أنه يمكن بوجه عام بيان أنه إذا كان a ، b ، c ، d أعداداً تقيس أربعة مقادير ، وكان $a - b = c - d$ ، فإن فروق المقادير تكون متساوية . قد يبدو مثلاً أن الفرق بين بوصة وبوصتين أكبر من الفرق بين ١٠٠١ بوصة و ١٠٠٢ بوصة . وليست لهذه الملاحظة أهمية في الحالة المذكورة ، مادمتا في غير حاجة ألينة إلى فروق الانقسام . ولكن في حالة المسافات يكون لها صلة غريبة بالهندسة غير الأقليدية . ولكن من المهم نظرياً ملاحظة أنه إذا كان الانقسام مقداراً حقاً — مما يبدو أن

المساحات والأحجام تتطلبه — فليس إذن ثمة أساس لقولنا إن انقسام مجموع من وحدتين أكبر بما يساوى ضعف وحدة واحدة . حقاً لا يمكن التسليم تماماً بهذه القضية إذ لا مقدار « هو » مجموع أجزاء ، فلا مقدار هو ضعف مقدار آخر . والذي يمكن أن نعنيه فقط ، هو أن مجموع وحدتين يشتمل على ضعف عدد الأجزاء وهذا حكم حسابي لا كمي ، ولا يكون ملائماً إلا في الحالة التي يكون فيها عدد الأجزاء متناهياً ، ما دام في الأحوال الأخرى يكون ضعف العدد هو بوجه عام مساوياً له . وهكذا فإن قياس الانقسام بواسطة الأعداد يشتمل على عنصر اصطلاحى ، وهذا العنصر كما سنرى أكثر ظهوراً في حالة المسافات .

١٦٨ — في الحالة السابقة ما زال هناك جمع بأحد معنييه الأساسيين ، وهو التأليف بين الكلات لتكوين كل جديد . ولكن في حالات أخرى من المقدار لا نحصل على مثل هذا الجمع . ذلك أن مجموع لذين ليس لذة جديدة بل هو مجرد لذين . كذلك مجموع مسافتين ليس بالضبط مسافة واحدة ، غير أنه في هذه الحالة نكون يلزاً امتداد لفكرة الجمع . ويجب أن يكون دائماً مثل هذا الامتداد ممكناً حيث نريد من القياس أن يقع بالمعنى الأقرب إلى الطبيعى والمحدد وهو الذى تناقشه الآن . وسأفسر أولاً هذا الجمع العام في صيغة مجردة ، ثم أوضح تطبيقه على المسافة .

يحدث في بعض الأحيان أن يكون لكميتين قاصرتين عن الجمع الصحيح علاقة لما نفسها علاقة واحد بواحد مع كمية من نفس النوع كالكيميتين التي تقوم بينهما . ولنقرض أن a ، b ، c هي هذه الكميات ، فنحصل في الحالة المفروضة على قضية ما هي a ب c حيث b علاقة تحدد وحدها وتحدد فقط بواسطة كمية ما b من نفس النوع الذى ينتمى إليه a ، c . مثال ذلك إذا كان بين نسبتي علاقة يمكن أن نسميها فرقهما المحدد هو نفسه تماماً بواسطة نسبة أخرى ، وهي الفرق بين النسبتين المعلومتين فرقاً بالمعنى الحسابى . فلو كان a ، b ، c حدوداً في متسلسلة فيها مسافة ، فالمسافتان a ، b ، c لهما علاقة تقاس بواسطة المسافة b (ولو أنها ليست متطابقة معها) . وفي جميع مثل

هذه الأحوال نستطيع بامتداد الجمع أن نضع $a + b = c$ بدلا من $a + b = c$.
 وحيثما يكون لمجموعة من الكميات علاقات من هذا النوع ، وكان أيضاً $a + b = c$
 يلزم عنها $a + b = c$ بحيث يكون $a + b = c$ في استطاعتنا أن نسير كما
 لو كان أمامنا جمع عادي فنتمكن تبعاً لذلك من إدخال القياس العدد .

وستناقش فكرة المسافة مناقشة كاملة في الجزء الرابع في صلتها بالترتيب ،
 أما الذي يعنى الآن فهو بيان كيف يمكن أن تقاس المسافات . وسأستخدم
 لفظ المسافة بحيث يشمل مفهوماً أعم بكثير من المسافة في المكان . وسأعني
 بنوع المسافة بمجموعة من العلاقات الكمية اللامتائلة تقوم إحداها ، وإحداها
 فقط ، بين أى زوج من الحدود في فصل معلوم ، وتكون هذه العلاقات بحيث إذا
 وجدت علاقة من النوع الذي يقوم بين a ، b ، وكذلك بين b ، c ، فهناك
 علاقة من ذلك النوع بين a ، c ، وتكون العلاقة بين a ، c هي حاصل ضرب
 العلاقتين القائمتين بين a ، b و b ، c ، وهذا الحاصل تبديلي ، أى مستقل
 عن ترتيب العوامل . وأخيراً إذا كانت المسافة a أكبر من المسافة b ، إذن
 a أكبر من b ، حيث a ، b أى حد آخر في الفصل . ومع أن المسافات هي
 هكذا علاقات وهي لذلك لا منقسمة وقاصرة عن الجمع الصحيح ، فهناك
 اصطلاح بسيط وطبيعي تصبح بواسطته مثل هذه المسافات قابلة للقياس العددي
 والاصطلاح هو هذا : لتكن هذه المسافات a ، b ، c ، d ، e ، f ، g ، h ، i ، j ، k ، l ، m ، n ، o ، p ، q ، r ، s ، t ، u ، v ، w ، x ، y ، z ، aa ، ab ، ac ، ad ، ae ، af ، ag ، ah ، ai ، aj ، ak ، al ، am ، an ، ao ، ap ، aq ، ar ، as ، at ، au ، av ، aw ، ax ، ay ، az ، ba ، bb ، bc ، bd ، be ، bf ، bg ، bh ، bi ، bj ، bk ، bl ، bm ، bn ، bo ، bp ، bq ، br ، bs ، bt ، bu ، bv ، bw ، bx ، by ، bz ، ca ، cb ، cc ، cd ، ce ، cf ، cg ، ch ، ci ، cj ، ck ، cl ، cm ، cn ، co ، cp ، cq ، cr ، cs ، ct ، cu ، cv ، cw ، cx ، cy ، cz ، da ، db ، dc ، dd ، de ، df ، dg ، dh ، di ، dj ، dk ، dl ، dm ، dn ، do ، dp ، dq ، dr ، ds ، dt ، du ، dv ، dw ، dx ، dy ، dz ، ea ، eb ، ec ، ed ، ee ، ef ، eg ، eh ، ei ، ej ، ek ، el ، em ، en ، eo ، ep ، eq ، er ، es ، et ، eu ، ev ، ew ، ex ، ey ، ez ، fa ، fb ، fc ، fd ، fe ، ff ، fg ، fh ، fi ، fj ، fk ، fl ، fm ، fn ، fo ، fp ، fq ، fr ، fs ، ft ، fu ، fv ، fw ، fx ، fy ، fz ، ga ، gb ، gc ، gd ، ge ، gf ، gg ، gh ، gi ، gj ، gk ، gl ، gm ، gn ، go ، gp ، gq ، gr ، gs ، gt ، gu ، gv ، gw ، gx ، gy ، gz ، ha ، hb ، hc ، hd ، he ، hf ، hg ، hh ، hi ، hj ، hk ، hl ، hm ، hn ، ho ، hp ، hq ، hr ، hs ، ht ، hu ، hv ، hw ، hx ، hy ، hz ، ia ، ib ، ic ، id ، ie ، if ، ig ، ih ، ii ، ij ، ik ، il ، im ، in ، io ، ip ، iq ، ir ، is ، it ، iu ، iv ، iw ، ix ، iy ، iz ، ja ، jb ، jc ، jd ، je ، jf ، jj ، jh ، ji ، jj ، jk ، jl ، jm ، jn ، jo ، jp ، jq ، jr ، js ، jt ، ju ، jv ، jw ، jx ، ji ، jj ، jk ، jl ، jm ، jn ، jo ، jp ، jq ، jr ، js ، jt ، ju ، jv ، jw ، jx ، ji ، jj ، jk ، jl ، jm ، jn ، jo ، jp ، jq ، jr ، js ، jt ، ju ، jv ، jw ، jx ، ji ، jj ، jk ، jl ، jm ، jn ، jo ، jp ، jq ، jr ، js ، jt ، ju ، jv ، jw ، jx ، ji ، jj ، jk ، jl ، jm ، jn ، jo ، jp ، jq ، jr ، js ، jt ، ju ، jv ، jw ، jx ، ji ، jj ، jk ، jl ، jm ، jn ، jo ، jp ، jq ، jr ، js ، jt ، ju ، jv ، jw ، jx ، ji ، jj ، jk ، jl ، jm ، jn ، jo ، jp ، jq ، jr ، js ، jt ، ju ، jv ، jw ، jx ، ji ، jj ، jk ، jl ، jm ، jn ، jo ، jp ، jq ، jr ، js ، jt ، ju ، jv ، jw ، jx ، ji ، jj ، jk ، jl ، jm ، jn ، jo ، jp ، jq ، jr ، js ، jt ، ju ، jv ، jw ، jx ، ji ، jj ، jk ، jl ، jm ، jn ، jo ، jp ، jq ، jr ، js ، jt ، ju ، jv ، jw ، jx ، ji ، jj ، jk ، jl ، jm ، jn ، jo ، jp ، jq ، jr ، js ، jt ، ju ، jv ، jw ، jx ، ji ، jj ، jk ، jl ، jm ، jn ، jo ، jp ، jq ، jr ، js ، jt ، ju ، jv ، jw ، jx ، ji ، jj ، jk ، jl ، jm ، jn ، jo ، jp ، jq ، jr ، js ، jt ، ju ، jv ، jw ، jx ، ji ، jj ، jk ، jl ، jm ، jn ، jo ، jp ، jq ، jr ، js ، jt ، ju ، jv ، jw ، jx ، ji ، jj ، jk ، jl ، jm ، jn ، jo ، jp ، jq ، jr ، js ، jt ، ju ، jv ، jw ، jx ، ji ، jj ، jk ، jl ، jm ، jn ، jo ، jp ، jq ، jr ، js ، jt ، ju ، jv ، jw ، jx ، ji ، jj ، jk ، jl ، jm ، jn ، jo ، jp ، jq ، jr ، js ، jt ، ju ، jv ، jw ، jx ، ji ، jj ، jk ، jl ، jm ، jn ، jo ، jp ، jq ، jr ، js ، jt ، ju ، jv ، jw ، jx ، ji ، jj ، jk ، jl ، jm ، jn ، jo ، jp ، jq ، jr ، js ، jt ، ju ، jv ، jw ، jx ، ji ، jj ، jk ، jl ، jm ، jn ، jo ، jp ، jq ، jr ، js ، jt ، ju ، jv ، jw ، jx ، ji ، jj ، jk ، jl ، jm ، jn ، jo ، jp ، jq ، jr ، js ، jt ، ju ، jv ، jw ، jx ، ji ، jj ، jk ، jl ، jm ، jn ، jo ، jp ، jq ، jr ، js ، jt ، ju ، jv ، jw ، jx ، ji ، jj ، jk ، jl ، jm ، jn ، jo ، jp ، jq ، jr ، js ، jt ، ju ، jv ، jw ، jx ، ji ، jj ، jk ، jl ، jm ، jn ، jo ، jp ، jq ، jr ، js ، jt ، ju ، jv ، jw ، jx ، ji ، jj ، jk ، jl ، jm ، jn ، jo ، jp ، jq ، jr ، js ، jt ، ju ، jv ، jw ، jx ، ji ، jj ، jk ، jl ، jm ، jn ، jo ، jp ، jq ، jr ، js ، jt ، ju ، jv ، jw ، jx ، ji ، jj ، jk ، jl ، jm ، jn ، jo ، jp ، jq ، jr ، js ، jt ، ju ، jv ، jw ، jx ، ji ، jj ، jk ، jl ، jm ، jn ، jo ، jp ، jq ، jr ، js ، jt ، ju ، jv ، jw ، jx ، ji ، jj ، jk ، jl ، jm ، jn ، jo ، jp ، jq ، jr ، js ، jt ، ju ، jv ، jw ، jx ، ji ، jj ، jk ، jl ، jm ، jn ، jo ، jp ، jq ، jr ، js ، jt ، ju ، jv ، jw ، jx ، ji ، jj ، jk ، jl ، jm ، jn ، jo ، jp ، jq ، jr ، js ، jt ، ju ، jv ، jw ، jx ، ji ، jj ، jk ، jl ، jm ، jn ، jo ، jp ، jq ، jr ، js ، jt ، ju ، jv ، jw ، jx ، ji ، jj ، jk ، jl ، jm ، jn ، jo ، jp ، jq ، jr ، js ، jt ، ju ، jv ، jw ، jx ، ji ، jj ، jk ، jl ، jm ، jn ، jo ، jp ، jq ، jr ، js ، jt ، ju ، jv ، jw ، jx ، ji ، jj ، jk ، jl ، jm ، jn ، jo ، jp ، jq ، jr ، js ، jt ، ju ، jv ، jw ، jx ، ji ، jj ، jk ، jl ، jm ، jn ، jo ، jp ، jq ، jr ، js ، jt ، ju ، jv ، jw ، jx ، ji ، jj ، jk ، jl ، jm ، jn ، jo ، jp ، jq ، jr ، js ، jt ، ju ، jv ، jw ، jx ، ji ، jj ، jk ، jl ، jm ، jn ، jo ، jp ، jq ، jr ، js ، jt ، ju ، jv ، jw ، jx ، ji ، jj ، jk ، jl ، jm ، jn ، jo ، jp ، jq ، jr ، js ، jt ، ju ، jv ، jw ، jx ، ji ، jj ، jk ، jl ، jm ، jn ، jo ، jp ، jq ، jr ، js ، jt ، ju ، jv ، jw ، jx ، ji ، jj ، jk ، jl ، jm ، jn ، jo ، jp ، jq ، jr ، js ، jt ، ju ، jv ، jw ، jx ، ji ، jj ، jk ، jl ، jm ، jn ، jo ، jp ، jq ، jr ، js ، jt ، ju ، jv ، jw ، jx ، ji ، jj ، jk ، jl ، jm ، jn ، jo ، jp ، jq ، jr ، js ، jt ، ju ، jv ، jw ، jx ، ji ، jj ، jk ، jl ، jm ، jn ، jo ، jp ، jq ، jr ، js ، jt ، ju ، jv ، jw ، jx ، ji ، jj ، jk ، jl ، jm ، jn ، jo ، jp ، jq ، jr ، js ، jt ، ju ، jv ، jw ، jx ، ji ، jj ، jk ، jl ، jm ، jn ، jo ، jp ، jq ، jr ، js ، jt ، ju ، jv ، jw ، jx ، ji ، jj ، jk ، jl ، jm ، jn ، jo ، jp ، jq ، jr ، js ، jt ، ju ، jv ، jw ، jx ، ji ، jj ، jk ، jl ، jm ، jn ، jo ، jp ، jq ، jr ، js ، jt ، ju ، jv ، jw ، jx ، ji ، jj ، jk ، jl ، jm ، jn ، jo ، jp ، jq ، jr ، js ، jt ، ju ، jv ، jw ، jx ، ji ، jj ، jk ، jl ، jm ، jn ، jo ، jp ، jq ، jr ، js ، jt ، ju ، jv ، jw ، jx ، ji ، jj ، jk ، jl ، jm ، jn ، jo ، jp ، jq ، jr ، js ، jt ، ju ، jv ، jw ، jx ، ji ، jj ، jk ، jl ، jm ، jn ، jo ، jp ، jq ، jr ، js ، jt ، ju ، jv ، jw ، jx ، ji ، jj ، jk ، jl ، jm ، jn ، jo ، jp ، jq ، jr ، js ، jt ، ju ، jv ، jw ، jx ، ji ، jj ، jk ، jl ، jm ، jn ، jo ، jp ، jq ، jr ، js ، jt ، ju ، jv ، jw ، jx ، ji ، jj ، jk ، jl ، jm ، jn ، jo ، jp ، jq ، jr ، js ، jt ، ju ، jv ، jw ، jx ، ji ، jj ، jk ، jl ، jm ، jn ، jo ، jp ، jq ، jr ، js ، jt ، ju ، jv ، jw ، jx ، ji ، jj ، jk ، jl ، jm ، jn ، jo ، jp ، jq ، jr ، js ، jt ، ju ، jv ، jw ، jx ، ji ، jj ، jk ، jl ، jm ، jn ، jo ، jp ، jq ، jr ، js ، jt ، ju ، jv ، jw ، jx ، ji ، jj ، jk ، jl ، jm ، jn ، jo ، jp ، jq ، jr ، js ، jt ، ju ، jv ، jw ، jx ، ji ، jj ، jk ، jl ، jm ، jn ، jo ، jp ، jq ، jr ، js ، jt ، ju ، jv ، jw ، jx ، ji ، jj ، jk ، jl ، jm ، jn ، jo ، jp ، jq ، jr ، js ، jt ، ju ، jv ، jw ، jx ، ji ، jj ، jk ، jl ، jm ، jn ، jo ، jp ، jq ، jr ، js ، jt ، ju ، jv ، jw ، jx ، ji ، jj ، jk ، jl ، jm ، jn ، jo ، jp ، jq ، jr ، js ، jt ، ju ، jv ، jw ، jx ، ji ، jj ، jk ، jl ، jm ، jn ، jo ، jp ، jq ، jr ، js ، jt ، ju ، jv ، jw ، jx ، ji ، jj ، jk ، jl ، jm ، jn ، jo ، jp ، jq ، jr ، js ، jt ، ju ، jv ، jw ، jx ، ji ، jj ، jk ، jl ، jm ، jn ، jo ، jp ، jq ، jr ، js ، jt ، ju ، jv ، jw ، jx ، ji ، jj ، jk ، jl ، jm ، jn ، jo ، jp ، jq ، jr ، js ، jt ، ju ، jv ، jw ، jx ، ji ، jj ، jk ، jl ، jm ، jn ، jo ، jp ، jq ، jr ، js ، jt ، ju ، jv ، jw ، jx ، ji ، jj ، jk ، jl ، jm ، jn ، jo ، jp ، jq ، jr ، js ، jt ، ju ، jv ، jw ، jx ، ji ، jj ، jk ، jl ، jm ، jn ، jo ، jp ، jq ، jr ، js ، jt ، ju ، jv ، jw ، jx ، ji ، jj ، jk ، jl ، jm ، jn ، jo ، jp ، jq ، jr ، js ، jt ، ju ، jv ، jw ، jx ، ji ، jj ، jk ، jl ، jm ، jn ، jo ، jp ، jq ، jr ، js ، jt ، ju ، jv ، jw ، jx ، ji ، jj ، jk ، jl ، jm ، jn ، jo ، jp ، jq ، jr ، js ، jt ، ju ، jv ، jw ، jx ، ji ، jj ، jk ، jl ، jm ، jn ، jo ، jp ، jq ، jr ، js ، jt ، ju ، jv ، jw ، jx ، ji ، jj ، jk ، jl ، jm ، jn ، jo ، jp ، jq ، jr ، js ، jt ، ju ، jv ، jw ، jx ، ji ، jj ، jk ، jl ،

المسافات بينها . وهذه الحدود علاوة على العامل الاختياري ثابت جمع اختياري يعتمد على اختيار الأصل . وهذه الطريقة التي تقبل تعميماً آخر مستشرح شرحاً كاملاً في الجزء الرابع . ولكي نبين أن « جميع » المسافات في هذا النوع ، و « جميع » الحدود في هذه المجموعة يمكن أن يكون لها أعداد تفرض عليها ، نحتاج إلى بديهتين أخريين ، هما بديهية أرشميدس ، والبدئية التي يمكن أن تسمى بديهية الخطية linearity^(١) .

١٦٩ — وأهمية القياس العددي للمسافة على الأقل كما يطبق على المكان والزمان ، يعتمد في شرط^٢ منه على حقيقة أخرى بها يرتبط بالقياس العددي للانقسام . ففي جميع المتسلسلات توجد حدود متوسطة بين أى حدين ليست المسافة بينهما هي النهاية الصغرى . وتتبع هذه الحدود حين يتعين أقصى حدين . ويمكن أن تسمى الحدود المتوسطة بينهما « الامتداد stretch » من ١ إلى ١ هـ^(٣) . والكل المركب من هذه الحدود كمية ، وله انقسام يقاس بعدد الحدود بشرط أن يكون عددها متناهياً . فإذا كانت المتسلسلة بحيث تكون مسافات الحدود المتعاقبة متساوية ، فإنه إذا كان هناك هـ — ١ من الحدود بين ١ ، ١ هـ ، كان مقياس المسافة متناسباً مع هـ . وهكذا فلو أننا أدخلنا في الامتداد أحد الحدين الآخرين دون الآخر ، كان مقياس الامتداد والمسافة متناسين ، وناظرت الامتدادات المتساوية المسافات المتساوية . وبذلك فإن عدد الحدود في الامتداد يقيس كلا من المسافة بين الحدين النهائيين ومقدار انقسام الامتداد كله . وحين يشتمل الامتداد على عدد لامتناه من الحدود ، نقدر لها امتدادات متساوية ، كما هو مبين فيما سبق . وحين تناظر الامتدادات المتساوية المسافات المتساوية ، عندئذ

(١) انظر الجزء الرابع الباب الخامس والثلاثين . وتقرر هذه البديهية أن المقدار يمكن أن ينقسم إلى ن من الأجزاء المتساوية ، ويكون جزءاً من تعريف ديوس ريمند المقدار الطول — انظر كتابه *Allgemeine Functionentheorie* (Tübingen, 1882), Chap. 1, § 16. وكذلك Bettazzi, *Teoria generale* (Fies, 1880), p. 44. وتقرر بدئية أرشميدس أنه إذا علم مقدار ن من نوع ما فإن المضاعف المنتهي للأصغر يفوق الأكبر .

(٢) يسميها ستروك Strecke — المرجع السابق ص ٢٢ .

تصبح هذه بديهية قد تصلح في حالة معينة وقد لا تصلح . وفي هذه الحالة تقيس الإحداثيات مقدارين متميزين تماماً ، ونظراً إلى مقياسهما المشترك فإنهما يختلطان باستمرار .

١٧٠ - يفسر التحليل السابق مشكلة غريبة لا بد أنها ضاقت معظم الذين حاولوا فلسفة أمور الهندسة . فإذا بدأنا من المقادير ذات البعد الواحد المتصلة بالخط المستقيم أمكن أن نقسم معظم النظريات إلى قسمين ، البعض يناسب المساحات والأحجام ، والآخر يناسب الزوايا بين الخطوط أو السطوح . والمساحات والأحجام تختلف اختلافاً أساسياً عن الزوايا ، وتهملها عموماً الفلاسفة التي تأخذ بنظريات علاقية في المكان أو تبدأ من الهندسة الإسقاطية . وعلة ذلك في غاية البساطة . فإذا كان على الخط المستقيم كما هو مفروض عادة مثل هذه العلاقة كالمسافة ، فعتدنا مقداران متميزان فلسفياً ولكنهما مانحمان عملياً ، وهما المسافة وانقسام الامتداد . والمسافة شبيهة بالزوايا ، وانقسام الامتداد شبيه بالمساحات والأحجام . ويمكن أن تعتبر كذلك الزوايا كسافات بين الحدود في متسلسلة أى بين خطوط من نقطة ، أو سطوح من خط . على العكس المساحات والأحجام هي حاصل جمع أو مقادير انقسام . ونظراً لاختلاط نوعي المقدار المرتبطين بالخط ، فإما ألا تنفق عادة الزوايا ، أو السطوح والأحجام ، مع الفلسفة المتحررة لتلائم الخط . ويفسر عدم التوافق هذا ويتبدد بالتحليل السابق الذكر^(١) .

١٧١ - وهكذا نرى كيف أن فصلين كبيرين من المقادير - الانقسامات والمسافات - يصبحان قابليين للقياس . وهذان الفصلان يشملان عملياً ما نسميه عادة بالمقادير الممتدة extensive ، ومن الخير الاستمرار في إطلاق هذا الاسم عليهما . وسأطلق هذا الاسم بحيث يشمل جميع المسافات والانقسامات سواء أكان لها أى علاقة بالمكان والزمان أم لا . غير أن لفظة « الممتدة » لا يجب أن

(١) سرى في الجزء السادس من الأسباب ما يجعلنا نرفض المسافة في معظم الأمكنة . ولكن لا يزال ثمة تمييز بين الانقسامات المشتتة على حدود بعض المتسلسلات ، وبين تلك الكيات للمساحات والأحجام حيث لا تكون الحدود بل معنى بسيط متسلسلة ذات بعد واحد .

فترض أنها تدل كما تدل عادة ، على أن المقادير الموصوفة بها منقسمة ، فقد رأينا من قبل أنه لا مقدار منقسم . « الكميات » هي المنقسمة فقط إلى كميات أخرى في الحالة الوحيدة التي تكون فيها الكلات كميات انقسام . أمّا الكميات التي هي مسافات فليست منقسمة إلى مسافات أصغر ، ولو أتى سأميها ممتدة . ولكنها تسمح بهذا النوع المام من الجمع الذي شرحناه سابقاً ، والذي سأميها في المستقبل الجمع العلاقي^(١) .

وجميع المقادير والكميات الأخرى يمكن أن تسمى بحق « مفردة » ، وهي التي يستحيل قياسها العددي إلا بعلاقة سببية مّا أو بواسطة علاقة تقريبية مما شرحناه في ابتداء هذا الباب . وسيظن الرياضيون الذين ألفوا التأكيدي المطلق للأعداد أننا لا نستطيع أن نقول الشيء الكثير بالتحديد فيما يختص بالمقادير القاصرة عن القياس . وليس الأمر كما يظنون بأي حال . فأحكام المساواة المباشرة التي يعتمد عليها كل قياس (كما رأينا) لا تزال ممكنة حيث يتعسر القياس ، كما يمكن استخدام كذلك الأحكام المباشرة للأكبر والأصغر . وإنما ينشأ الشك حيث يكون الفرق صغيراً ، وكل ما يفعله القياس في هذا الصدد هو أن يجعل حافة الشك أصغر — وهو عمل نفساني بحث وليس له أهمية فلسفية . فالكميات التي لا تقبل القياس العددي يمكن على هذا النحو أن ترتب في سلم من المقادير الأكبر والأصغر ، وهذا هو الإجراء الكمي الوحيد الدقيق حتى للقياس العددي ، فيمكننا أن نعرف أن مقداراً أكبر من آخر ، وأن مقداراً ثالثاً متوسط بينهما . وأيضاً ما دامت فروق المقادير هي دائماً مقادير ، فهناك دائماً جواب (نظرياً على الأقل) لهذا السؤال : أيكون فرق زوج من المقادير أكبر أو أقل من فرق زوج آخر من نفس النوع ، أم هو نفس الفرق . ومثل هذه القضايا وله أنها قد تبدو للرياضي تقريبية إلا أنها تبلغ من الدقة والتحديد مبلغ قضايا الحساب . بدون القياس العددي إذن ، للعلاقات الكمية جميع التحديدات التي

(١) لا يجب أن يخلط هذا النوع من الجمع بالجمع النسبي relative الخاص بجمع العلاقات (النسب) ، فهذا متصل أكثر بالضرب النسبي .

تقدر عليها — ولا شيء يضاف من الوجهة النظرية بتعيين الأعداد المترابطة .
 الواقع أن موضوع قياس الكميات بأسره ذو أهمية عملية أكثر منها نظرية . والجزء
 المهم نظرياً فيه داخل في مسألة أوسع ، هي ترابط المتسلسلة مما سنبحثه بحثاً أوفى
 فيما بعد . والسبب الرئيسي الذي جعلنى أعالج هذا الموضوع في مثل هذا الإطنا ب
 يرجع إلى أهميته التقليدية ، ولولا ذلك لاقتصر بحثه على ملخص أكثر إيجازاً .

الباب الثاني والعشرون

الصفر

١٧٢ - لا يبحث هذا الباب في أى صورة من صور الصفر العددي ولا في اللامتناهي في الصفر infinitesimal ، بل في الصفر البحث للمقدار . وهذا هو الصفر الذى كان في ذهن كانط حين نقض برهان مندلسون على خلود النفس ^(١) . ويذهب كانط إلى أن المقدار المقرط قد يصبح صفرأ مع بقائه من نفس النوع ؛ وأنه مع أن الصفر مقدار محدد ، إلا أنه لا كمية مقدارها صفر يمكن أن توجد . وهذا النوع من الصفر هو كما سنرى معنى كمى أساسى ، وهو من جملة النقط التى تتسم بها نظرية الكمية فتطبعها بطابع خاص بها . وللصفر الكى صلة معينة بكل من العدد ، والفصل الصفرى في المنطق ، ولكنه (فيما أعتقد) لا يقبل التعريف بدلالة أى منهما . أما استتلاله التام عن اللامتناهي في الصفر فالاعتراف العام به أقل . ولن نقاش هذا إلا في الباب المقبل .

إن معنى الصفر في أى نوع من الكمية مسألة كثيرة الصعوبة وينبغى معالجتها بأعظم عناية ، إذا شئنا تجنب المتناقضات . ويبدو أن الصفر يمكن تعريفه بخاصية عامة معينة دون الإشارة إلى أى ميزة خاصة بنوع الكمية التى ينتمى إليها . ومع ذلك فالوصول إلى مثل هذا التعريف ليس بالأمر اليسير . والصفر « يبدو » أنه تصور متميز أساساً تبعاً للمقادير التى نبهجها ، أهى منفصلة أم متصلة . ولكى نثبت أن الأمر ليس على هذا النحو فلنبحث التعاريف المقترحة المختلفة .

١٧٣ - (١) يعتبر الأستاذ مينونج (المرجع السابق ص ٨) الصفر أنه المقابل المتناقض لكل مقدار من نوعه . وعجاجة « المقابل المتناقض Contradictory

« opposite » لا تخلو من الابس . فمقابل الفصل ، في المنطق الرمزي ، هو الفصل المشتمل على جميع الأفراد التي لا تنتمي إلى الفصل الأول . وبناء على ذلك لا بد أن يكون مقابل الفرد جميع الأفراد الأخرى . ومن الواضح أن هذا المعنى غير ملائم : فالصفر ليس كل شيء ما عدا مقداراً واحداً من نوعه ، ولا كل شيء ما عدا فصل المقادير التي من نوعه . فمن العسير اعتبار قولنا : إن ألفاً ما هو صفر للذة ، صحيحاً . ومن جهة أخرى نقول : إن صفر للذة هو « لا لذة » ، ومن الواضح أن هذا هو ما يعنيه الأستاذ مينونج . ولكن على الرغم من أننا سنرى أن هذه النظرية صحيحة فإن معنى العبارة صعب إدراكه جداً . فهي لا تعني شيئاً آخر سوى اللذة ، وكذلك حين يؤكد لنا أصلدقاوفا أنه ليس من اللذة أن تكشف لنا أخطاؤنا . ويبدو أن هذا يعني ما ليس بلذة ولا حتى بأى شيء آخر . ولكن ذلك ليس إلا طريقة معقدة لقولنا « لا شيء » ، ويمكن حذف الإشارة بالكلية إلى اللذة . وهذا يعطينا صفرًا هو بعينه لجميع أنواع المقادير ، وإذا كان ذلك هو المعنى الصحيح للصفر ، فليس الصفر إذن أحد المقادير من نوع ما ، ولا حداً في متسلسلة مكونة بواسطة مقادير من نوع ما . لأنه ولو أنه من الصحيح في الغالب أنه لا شيء أصغر من جميع المقادير من نوع ما ، فن الخطأ دائماً أن « لا شيء » ذاتها أصغر من جميعها . ليس لهذا الصفر إذن أى إشارة خاصة لأى نوع معين من المقدار ، وهو قاصر عن تحقيق الوظائف التي يتطلبها منه الأستاذ مينونج ^(١) . ومع ذلك فالعبارة ثقيل كما سنرى تفسيراً يتجنب هذه الصعوبة . ولنبحث أولاً بعض المعاني الأخرى المقترحة لهذا اللفظ .

١٧٤ - (٢) يمكن أن يعرف الصفر بأنه أقل مقدار من نوعه . وحيث يكون نوع من المقدار منفصلاً ، وبوجه عام حين يكون له ما يسميه الأستاذ بتازي Bettazzi مقدار « نهائى limiting » النوع ^(٢) ، فإن مثل هذا التعريف يكون غير كاف . إذ في تلك الحالة يبدو أن المقدار النهائى هو حقاً الأقل من

(١) انظر الملاحظة في آخر الباب التاسع عشر .

Teoria della Grandezze, Pisa, 1890, p. 24.

(٢)

نوعه . وعلى أى حال يعطى لنا التعريف خاصية أكثر مما يعطينا تعريفاً صحيحاً ، وهو الذى يجب أن نلتزمه فى معنى ما منطقي " بحت ، لأن الصفر لا يمكن أن يخلو من أن يكون على معنى ما إنكاراً لجميع المقادير الأخرى من النوع . والعبارة التى تقول بأن الصفر أقل المقادير شبيهة بالعبارة التى يمتثلها ديمورجان De Morgan لما فيها من خطابة ، وهى : « كان أخيل أقوى جميع أعدائه » . وهكذا فمن الخطأ الواضح القول بأن « أقل الأعداد الصحيحة الموجبة ، أو أن البعد بين ١ و ١ هو أقل بعد بين أى حرفين من الأبجدية . ومن جهة أخرى حيث يكون نوع من المقدار متصلاً وليس له مقدار نهائى فمع أننا فيما يظهر نحصل على اقتراب تدريجى وغير محدود من الصفر . إلا أنه ينشأ الآن اعتراض ، هو أن المقادير من هذا النوع هى أساساً ما ليس لها نهاية صغرى ، ومن ثم لا يمكننا بغير تناقض مقصود ، أن نأخذ الصفر على أنه نهايتها الصغرى . ومع ذلك قد نتجنب هذا الاعتراض بقولنا : إن هناك دائماً مقداراً أقل من أى مقدار آخر ، ولكنه ليس الصفر ، إلا إذا كان ذلك المقدار الآخر هو الصفر . وهذا التعديل يتجنب أى تناقض صورى ، ولا يرجع قصوره إلا إلى أنه يعطى علامة للصفر أكثر مما يعطى معناه الصحيح . وكل شيء آخر هو مقدار من النوع المذكور فقد يمكن أن يتناقض . ونريد أن نعرف ، ما الذى يجعل الصفر قاصراً كما هو الواضح من أى تناقض آخر . ولما كان التعريف المقترح لا يدلنا عليه ، فإنه على الرغم من أنه يعطى خاصية لا تنتمى فى الغالب لأى مقدار آخر من هذا النوع ، فلا يمكن اعتباره من الناحية الفلسفية كافياً . وفضلاً عن ذلك فحينما تكون هناك مقادير سالبة ، فإن هذا الترتيب يمنعنا من اعتبار هذه المقادير أقل من الصفر .

١٧٥ - (٣) حيث تكون المقادير فوقاً أو مسافات ، فللصفر من أول وهلة معنى واضح هو التطابق . وهنا نجد أن الصفر بحسب التعريف المذكور يبدؤه من الأولى ألعلاقة له بنوع ما من المسافات دون نوع آخر : فقد يبدو ، أن صفر المسافة فى الزمان هو نفسه كصفر المسافة فى المكان . ومع ذلك فيمكن

تجنب هذا الاعتراض بأن نضع بدل التطابق البحث ، التطابق المصحوب
بعضوياً في فصل الحدود التي تقوم المسافات المذكورة بينها . وبهذه الحيلة
نجعل الصفر في أى فصل من العلاقات التي هي مقادير ، محدداً تماماً ونحالياً من
التناقض . وعلاوة على ذلك عندنا كل من صفر الكميات وصفر المقادير ،
لأنه إذا كان a و b حدين من الفصل الذي له المسافات ، فالتطابق مع a .
والتطابق مع b هما صفران متميزان من الكمية ^(١) . وبذلك تتضح هذه الحالة
وضوحاً تاماً . ومع ذلك فالتعريف لا بد أن يستبعد ، إذ من الواضح أن
للصفر معنى مائلاً عاماً ، بشرط أن نضع ذلك في صيغة واضحة ، وهو ما ينطبق على
جميع فصول الكميات . وليس صفر المسافة هو بالفعل نفس التصور كالتطابق

١٧٦ - (٤) في أى فصل من المقادير التي تكون متصلة بمعنى أن لها
حداً بين أى اثنين ، والتي أيضاً ليس لها مقدار نهائى ، فيمكن أن ندخل
الصفر في الطريقة التي نحصل بها على الأعداد الحقيقية من المنطقات . فأى
مجموعة من المقادير تعرف فصلاً من المقادير أقل منها جميعاً ، وهذا الفصل من
المقادير يمكن أن نجعله من الصفر كما نحب ، ويمكن بالفعل أن نجعله الفصل
الصفرى أى لا يشتمل على حدود إطلاقاً . (ويحدث ذلك مثلاً إذا كانت
المجموعة تشتمل على جميع المقادير من النوع) والفصول التي تعرف على هذا
النحو تكون متسلسلة لها صلة وثيقة بمتسلسلة المقادير الأصلية ، وفي هذه
المتسلسلة الجديدة ، الفصل الصفرى هو قطعاً أول حد . وهكذا إذا اعتبرنا الفصول
كميات ، فالفصل الصفرى هو كمية صفر ، وليس هناك فصل يشتمل على
عدد متناه من الأعضاء ، فلا يكون هناك كما هي الحال في الحساب اقتراب متفصل
من الفصل الصفرى ، على العكس الاقتراب بمعان متعددة لهذه اللفظة متصل .
وهذه الطريقة في تعريف الصفر المطابقة لتلك التي تدخل العدد الحقيقى الصفر
مهمة ، وستناقشها في الجزء الرابع . ولكننا الآن يمكن أن نلاحظ أن هذا التعريف

(١) ارجع في هذه النقطه إلى بند ٥٥ ، فيما سبق .

يجعل الصفر واحداً لجميع أنواع المقادير ، ولا يجعله واحداً من بين المقادير التي يكون الصفر منها .

١٧٧ - (٥) نحن مضطرون في هذه المسألة أن نواجه المشكلة الخاصة بطبيعة السلب . من الواضح أن « لا لثة » تصور مختلف عن « لا ألم » حتى حين يؤخذ هذان الحدان بدقة على أنهما مجرد إنكار للثة وللألم على التعاقب . وقد يبدو أن « لا لثة » لها نفس العلاقة « باللثة » كما يكون لمختلف المقادير من اللثة ، ولو أن لها كذلك طبعاً العلاقة الخاصة بالسلب . فإذا سلمنا بذلك رأينا أنه إذا عرّف نوع من المقادير بالشئ الذي به كانت مقادير فيرتب على ذلك أنه « لا لثة » واحد من بين المقادير المتعددة للثة . فإذا تمسكنا ببلديتنا من أن جميع أزواج المقادير من نوع واحد لها علاقات لامتساواة ، فينبغي أن نسلم أن الصفر أقل من جميع المقادير الأخرى من نوعه . حقاً يبدو من الواضح أنه يجب التسليم بذلك ، من واقع أن الصفر من الجلى أنه « ليس أكبر » من جميع المقادير الأخرى من نوعه . وهذا يبين أن للصفر علاقة مع « أصغر » ليست له مع « أكبر » . وإذا نحن أخذنا بهذه النظرية فلن نقبل بعد الرأي الواضح واليسط عن المسافات الصفر مما سبق ذكره ، ولكننا سنذهب إلى أن المسافة الصفر هي بالدقة فقط « لا مسافة » وأنها مترابطة فقط بالتطابق . وهكذا قد يبدو أن نظرية الأستاذ مينونج التي بدأنا بها صحيحة جوهرياً وإنما نحتاج إلى تعديل طبعاً للنظرية السابقة في هذا الأمر : وهو أن المقدار الصفر هو إنكار اتصوّر المعرفة لنوع من المقادير ، وليس إنكار أى مقدار واحد خاص أو إنكارها جميعاً . ولا بد لنا أن نذهب ، إلى أن أى تصور يعرف نوعاً من المقادير يعرف كذلك بسلبه مقداراً خاصاً من النوع يسمى صفر ذلك النوع ، ويكون أقل من جميع الأعضاء الأخرى من النوع . فنحن الآن نجنى ثمرة التمييز المطلق الذي أجريناه بين التصوّر المعرفة لنوع من المقدار وبين مختلف المقادير من النوع . والعلاقة التي سلمنا بها بين مقدار خاص وبين ذلك الذي هو مقدار له لم تكن متطابقة مع فصل العلاقة ، بل تقرر أنها ذاتية؛

فلا تناقض إذن كما هو الحال في معظم النظريات في افتراض أن هذه العلاقة تقوم بين «لا لنة» و«لنة»، أو بين «لا مسافة» و«مسافة»

١٧٨ — وأخيراً علينا أن نلاحظ أن «لا لنة»، وهي المقدار الصفري، لا نحصل عليها من الإنكار المنطقي للنة، وليست نفس الشيء كالمعنى المنطقي لـ «لا لنة». على العكس «لا لنة» تصور كى أساساً، له علاقة غريبة ووثيقة بالإنكار المنطقي، تماماً كما أن «له علاقة وثيقة جداً بالفصل الصفري». وهذه العلاقة هي أنه ليس هناك «كية» مقدارها صفر حتى يكون فصل الكميات الصفري هو الفصل الصفري^(١). وصفر أى نوع من المقدار قاصر عن تلك العلاقة بالوجود أو بالجزئيات، والمقادير الأخرى تقوى عليها. ولكن هذه قضية تركيبية، لنا فقط أن نقبلها على أساس أنها بيّنة بذاتها. والمقدار الصفري من أى نوع هو كالمقادير الأخرى غير قابل للتعريف بمعنى الكلمة، ولكنه يقبل التعيين بواسطة علاقته الخاصة بالصفري المنطقي.

(١) يجب أن يطلق هذا التصحيح ما سبق قوله عن المسافات الصفري.

اللانهاية ، واللامتناهى فى الصغر ، والاتصال

١٧٩ - تكاد جميع الأفكار الرياضية تعرض صعوبة كبيرة واحدة هى اللانهاية ، التى يعتبرها الفلاسفة عادة كتنقيضة ، وعلى أنها تبين أن قضايا الرياضة ليست صحيحة ميتافيزيقيا . وإنى مضطر أن أختلف مع هذا الرأى المأثور . فع أن جميع النقائص الظاهرة ، إلا تلك التى يمكن بسهولة التخلص منها ، والتى تنتمى لأسس المنطق ، فهى فى نظرى قابلة أن ترد إلى هذه الصعوبة الواحدة وهى العدد اللانهائى ، ومع ذلك فهذه الصعوبة نفسها يظهر أنها تقبل الحل بواسطة فلسفة صحيحة عن « أى any » ، وأنها قد تولدت إلى حد كبير من بليلة ترجع إلى إيهام فى معنى الأعداد الصحيحة المنتهية . وستناقش المشكلة بوجه عام فى الجزء الرابع ، أما غرض الباب الحالى فلأنما هو بيان أن الكمية ، التى كانت تعتبر الممثل الصحيح للانهاية واللانهائى فى الصغر والاتصال ، يجب أن تخلق السبيل فى هذا الصدد للترتيب ، حيث أن تقرير الصعوبات التى تنشأ فيما يختص بالكمية يمكن أن تصاغ فى صورة ترتيبية وحسابية فى وقت واحد ، دون أن تتطلب الإشارة إلى المميزات الخاصة بالكمية .

١٨٠ - والمشكلات الثلاثة عن اللانهاية واللانهائى فى الصغر والاتصال ، من جهة حصولها متصلة بالكمية ، لها ببعضها علاقة وثيقة ، ولا واحدة منها يمكن أن تناقش مناقشة كاملة فى هذه المرحلة ما دامت كلها تعتمد أساساً على الترتيب ، على حين يعتمد اللانهائى فى الصغر أيضاً على العدد . ومسألة الكمية اللانهائية ولو أنها تعتبر من الناحية التقليدية أعوص من الصغر ، إلا أنها فى الحقيقة أقل خطراً ، ويمكن باختصار التخلص منها ، لولما يظهره الفلاسفة عادة من تمسك شديد بقضية ساسميا بلديبية التناهى . ويظهر أنه من الصحيح من أمر بعض

أنواع المقدار (مثل النسب أو المسافات في المكان والزمان) أن هناك مقداراً أكبر من أى مقدار معلوم . ومعنى ذلك أن أى مقدار حين يذكر ، فيمكن أن نجد مقداراً آخر أكبر منه . واستنتاج الانهائية من هذه الحقيقة ، حين يكون الاستنتاج صحيحاً ، هو مجرد خرافة لتيسير تقرير النتائج التى نحصل عليها بطريقة النهايات في صورة مختصرة . إن أى فصل ى من المقادير من النوع المطلوب إذا عرّف ، فيمكن أن تنشأ ثلاث حالات :

١ - قد يكون هناك فصل من الحدود أكبر من نوعنا ى ، وهذا الفصل الجديد من الحدود قد يكون له عضو أصغر .

٢ - قد يكون هناك مثل هذا الفصل ولكن قد لا يكون له عضو أصغر .

٣ - قد لا تكون هناك مقادير أكبر من « أى » حد في فصلنا ى .

فلذا فرضنا أن نوع المقادير مما ليس فيه مقدار أكبر ، فإن الحالة رقم (٢) مستثناة دائماً حيث يشتمل الفصل ى على عدد متناه من الحدود . ومن ناحية أخرى إذا كانت متسلسلتنا مما تسمى Condensed in itself الكثيفة على نفسها ، فلن تنشأ الحالة رقم (٢) أبداً حين يكون ى فصلاً لانهائياً وليس له حد أكبر ، وإذا لم تكن متسلسلتنا كثيفة على نفسها ، بل لها حد بين أى حدين ، فيمكن الحصول دائماً على متسلسلة أخرى منها لها هذه الخاصية ^(١) . وهكذا فإن جميع المتسلسلات الانهائية التى ليس لها حد أكبر سيكون لها نهايات ، فيما عدا حالة (٣) . ولتجنب الإطراب نعرف الحالة (٣) بأنها تلك التى تكون النهاية فيها لانهائية . ولكن هذه هى مجرد حيلة يسلم عموماً بها الرياضيون على أنها كذلك . وبصرف النظر عن الأحوال الخاصة ، فليس ثمة سبب لمجرد أن نوعاً من المقادير ليس له نهاية عظمى للتسليم بأن ثمة مقداراً لانهائياً من هذا النوع أو ثمة كثيراً منها كذلك . وحين تقبل مقادير من نوع مّا ليس لها نهاية عظمى القياس العددي ، فإنها تخضع في الغالب لبديهية أرشميدس والتي بمقتضاها تكون نسبة أى مقدارين من النوع متناهية . وهكذا يتضح من هذه المناقشة أنه قد لا يكون

(١) سترش هذا فيما بعد في الجزء الخامس القيصن الرابع والتلاتين .

ثمة مشكلة متصلة باللانهاية .

ولكن عند هذه النقطة يكون الفيلسوف جديراً بالتدخل فيعلن أنه طبقاً لجميع المبادئ الفلسفية الصحيحة كل متسلسلة من الحدود معرفة تعريفاً جيداً فلا بد أن يكون لها حد أخير . فإذا ألح في خلق هذا الحد الأخير ، وسماه اللانهاية ، فإنه يستتج بسهولة متناقضات لا تقاوم يستدل بها على عجز الرياضة عن الحصول على الحقيقة المطلقة . ومع ذلك فلست أرى من جانبي سبباً لبديهية الفيلسوف . ولكي نبين إذا أمكن أنها ليست مبدأً فلسفياً ضرورياً ، فلنحاول تحليلها ونرى ما يدخل فيها حقيقة .

مشكلة اللانهاية كما برزت لنا الآن ليست بالضبط مشكلة كمية بل الأولى أنها مما يتعلق بالترتيب . وتنشأ المشكلة لمجرد أن مقاديرنا تكون متسلسلة ليس لها حد أخير ، أما أن المتسلسلة مركبة من مقادير فليس داخلها في الحساب أصلاً . وبهذه الملاحظة يمكن أن أرجئ مناقشة الموضوع إلى مرحلة مقبلة . غير أنه من الجدير الآن أن نكشف عن بديهية الفيلسوف الخاصة بالتناهي إذا لم يتيسر بحثها .

١٨١ - ويحسن من ابتداء الأمر أن نبين كيف أن المشكلة الخاصة باللانهاية هي نفس تلك الخاصة بالاتصال واللانهاية في الصفر . ولتحقيق هذا الغرض سنجد من المناسب تجاهل الصفر المطلق ، وأن نعى ، حين نتكلم عن أى نوع من المقادير ، جميع المقادير من النوع ما عدا الصفر . وهذا مجرد تغيير في العبارة ، وبدون هذا التغيير لا بد من تكرار لا يطاق . والآن هناك بكل تأكيد بعض أنواع من المقادير تقوم على البديهيات الثلاث الآتية :

(١) إذا كان a و b أى مقدارين من النوع ، وكان a أكبر من b ، فهناك دائماً مقدار ثالث c بحيث يكون a أكبر من c ، c أكبر من b (سأسمى هذه البديهية في الوقت الحاضر بديهية الاتصال) .

(٢) هناك دائماً مقدار أصغر من أى مقدار معلوم b .

(٣) هناك دائماً مقدار أكبر من أى مقدار معلوم a .

ويرتب على هذه البديهيات ما يأتي :

١ - لا بمقدارين من النوع متعاقبان .

٢ - لا يوجد مقدار هو الأصغر - هو أصغر مقدار .

٣ - لا يوجد مقدار هو الأكبر - هو أكبر مقدار .

القضايا السابقة صحيحة بكل تأكيد عن « بعض » أنواع المقدار ، ويبقى أن نفحص أ تكون صحيحة عن « جميع » الأنواع . أما القضايا الثلاث الآتية ، وهى التى تناقض مباشرة الثلاث السابقة فيجب أن تكون دائماً صادقة إذا كنا سنسلم ببدئية الفيلسوف عن التناهى .

(أ) هناك مقادير متعاقبة ، نعى مقادير بحيث لا مقدار آخر من نفس النوع أكبر من الأصغر ، وأصغر من الأكبر لمقدارين معينين .

(ب) هناك مقدار أصغر من أى مقدار آخر من نفس النوع .

(ج) هناك مقدار أكبر من أى مقدار آخر من نفس النوع ^(١) .

ولما كانت هذه القضايا الثلاث تناقض مباشرة الثلاث السابقة ، فقد يبدو أن كلا المجموعتين لا يمكن أن تكونا صحيحتين معاً . وستناقش أسس المجموعتين ، ثم نستبعد إحداهما .

والآن لنبدأ بالقضايا (أ) ، (ب) ، (ج) ونبحث طبيعة الأسس التى تقوم عايتها كل منها :

١٨٢ - (أ) إذا علم مقدار محدود أ ، فجميع المقادير الأكبر من أ تكون متسلسلة فروقها عن أ هى مقادير من نوع جديد . فإذا وجد مقدار ب متعاقب مع أ ، فالفرق بينه وبين أ سيكون أصغر مقدار من نوعه ، بشرط أن تناظر الامتدادات المتساوية المسافات المتساوية فى المتسلسلة . وبالعكس إذا

(١) أولئك الهيجليون الذين يلتصون فرصة وجود قضيضة يمكن أن يتقدموا إلى تعريف الصفر والانهاية بواسطة القضايا السابقة . حين نسل رقم (٢) ، (ب) معاً ، فقد يقولون إن المقدار الذى يحقق (ب) يسمى صفراً . وحين نسل رقم (٣) ، (ج) معاً ، فالمقدار الذى يحقق (ج) يسمى الانهاية . ومع ذلك فقد رأينا أن الصفر يجب أن يعرف بطريقة أخرى ، وأن يستبعد قبل أن يصبح (٢) صحيحة ، وعلى حين أن الانهاية ليست مقدراً من النوع المذكور ألبتة ، بل مجرد اختصار رياضى (ليست الانهاية بوجه عام هى المقصودة بل المقدار اللانهاى فى الأحوال التى نناقشها) .

كان هناك أصغر فرق بين مقدارين a ، b ، فلا بد أن يكون هذان المقداران متعاقبين . وإذا لم يكن الأمر كذلك فأى مقدار متوسط سيكون له مع a فرق أصغر من الفرق الذى بين b و a . وهكذا إذا كانت قضية (ب) كلية صادقة ، فإن (ا) تكون صادقة كذلك . وبالعكس إذا كانت (ا) صادقة ، وكانت متسلسلة المقادير بحيث تناظر الامتدادات المتساوية المسافات المتساوية ، فإن (ب) صادقة بالنسبة للمسافات بين المقادير المذكورة . وقد تقنع برد (ا) إلى (ب) ، ثم نشرع إلى إثبات (ب) . ولكن يبدو من الجدير أن نقدم برهاناً مباشراً ، مما نفترض وجوده فى ذهن فلاسفة التناهي .

يوجد بين a و b عدد معين من المقادير ، إلا إذا كان a و b متعاقبين . وجميع المقادير المتوسطة لها ترتيب ، بحيث إذا سرنا من a إلى b مررنا بجميع المقادير المتوسطة . وفى مثل هذا العد لا بد أن يكون هناك مقدار «مأ» يأتى عقب أى مقدار c . أو إذا وضعنا المسألة بصورة أخرى ، فما دام العد لا بد أن يبدأ ، فيجب أن يبدأ من مكان مأ ، والحد الذى يبدأ به لا بد أن يكون المقدار الذى يعقب a . فإذا لم يكن الأمر كذلك ، فلن تكون هناك متسلسلة محددة ، لأنه إذا كانت جميع الحدود لها ترتيب ، فبعضها لا بد أن يكون متعاقباً .

والمهم فى الحجة السابقة هو اعتمادها على العدد . وتلور الحجة بأسرها على المبدأ الذى به يتبين أن العدد اللانهائى متناقض مع نفسه ، وهذا المبدأ هو : « أى مجموعة معلومة من الحدود فلا بد أن تشمل على عدد متناه من الحدود » . فنقول : جميع المقادير بين a و b تكون مجموعة ، فإذا لم يكن هناك مثل هذه المقادير ، كان a و b متعاقبين ، وتقررت المسألة . وإذا كان هناك مثل هذه المقادير ، فلا بد أن يكون هناك عدد متناه منها ، ليكن m . وما دامت تكون متسلسلة ، فهناك طريقة محددة لتحديد الأعداد الترتيبية من a إلى m . وبناء على ذلك يكون الذى ترتيبه m ، والذى ترتيبه $(m + 1)$ متعاقبين .

وإذا أنكرنا البديهية المذكورة فى الفقرة السابقة بين حاصرتين ، انهارت

الحجة كلها. وهذه أيضاً كما سنرى هي الحالة بالنسبة لـ (ب) ، (ح) .

(ب) البرهان هنا شبيه بالقبض بالبرهان في (أ) . إذا لم يكن هناك مقادير أصغر من أ ، إذن أ هي أصغر مقدار من نوعها ، وتقرر المسألة . فإذا كان هناك مقادير فإنها تكون مجموعة معينة ، فيكون لها (بحكم بديهيتها) عدد متناه ، وليكن هـ . وما دامت تكون متسلسلة ، فيمكن أن نعين للمقادير أعداداً ترتيبيه تتزايد كلما أصبحت المقادير أبعد فأبعد من أ . وهكذا فإن المقدار النوني هو أصغر مقدار من نوعه .

(ح) نحصل هنا على البرهان كما حصلنا عليه في (ب) إذا اعتبرنا مجموعة المقادير أكبر من أ . وهكذا فإن كل شيء يعتمد على بديهيتها التي يبدو لا يمكن أن يكون لنا ما نقوله ضد الاتصال ، أو ضد علم وجود أكبر أو أصغر مقدار . أما فيما يختص بالبديهية نفسها فسنرى أن ليس لها إشارة خاصة إلى الكمية ، ولأول وهلة قد يبدو أن ليس لها إشارة إلى الترتيب . ولكن لفظة « المتناهي » التي تقع فيها تحتاج إلى تعريف . وهذا التعريف في الصورة الملائمة بالمناقشة الحاضرة له كما سنرى إشارة جوهرية إلى الترتيب .

١٨٣ — أشك في أن أحداً من الفلاسفة الذين طعنوا في العدد اللانهائي قد عرف الفرق بين الأعداد المتناهية واللامتناهية . والفرق ببساطة هو ما يأتي : تخضع الأعداد المتناهية لقانون الاستنباط الرياضي ، ولا تخضع لها الأعداد اللامتناهية . بعبارة أخرى إذا علم أي عدد هـ ، فإذا كان هـ يتنى لكل فصل من يتنى إليه ٠ ، ويتنى إليه أيضاً العدد التالي بعد أي عدد من أعداد الفصل س ، إذن هـ متناه ؛ وإذا لم يكن كذلك لم يكن متناهياً . وفي هذا وحده وما يرتب عليه من نتائج تفرق الأعداد المتناهية عن اللامتناهية ^(١) .

ويمكن صياغة المبدأ بنحو آخر كما يأتي : إذا كانت كل قضية تصح بالنسبة إلى ٠ ، وتصح كذلك بالنسبة للتالي المباشر لكل عدد تصدق عليه ،

(١) يجب مع ذلك أن نذكر أن إحدى هذه النتائج تطرأ فقط بين الأعداد المتناهية واللامتناهية عما قد يؤخذ على أنه تعريف مستقل . وقد شرحنا ذلك في فائزنا الثاني الباب الثالث عشر، وستناقشه فيما بعد في الجزء الخامس .

فإنها تصح بالنسبة للعدد n ، فإذا لم متناه ، وإذا لم يكن الأمر كذلك لم يكن متناهياً . وهذا هو المعنى الدقيق لما يمكن أن نعبر عنه تعبيراً شائعاً بقولنا : إن كل عدد متناه يمكن أن نصل إليه من ∞ بخطوات متتالية ، أو بالجمع المتتالي ١ . وهذا هو المبدأ الذى يجب على الفيلسوف أن يسلم به على أنه منطبق بوضوح على جميع الأعداد ، ولو أنه مضطر إلى التسليم بأن المبدأ كلما كانت صياغته أدق ، كلما أصبح أقل وضوحاً .

١٨٤ — من الجدير أن نبين بالضبط كيف يدخل الاستنباط الرياضى فى الأدلة السابقة. ولتأخذ الدليل الموجود فى (١) ولنفرض أن هناك n من المقادير بين 1 و b . ثم لكى نبدأ فقد فرضنا أن هذه المقادير تقبل العد ، أى تقبل ترتيباً فيه حدود متعاقبة وحد أول ، وحد يسبق مباشرة أى حد ما عدا الأول . وهذه الخاصية نفترض مقدماً الاستنباط الرياضى ، وكانت فى الواقع الخاصية المتنازع عليها . واما لا ينبغي أن نفترض مقدماً إيه كان العد ، وإلا كان ذلك مصادرة على المطالب . ولكن دعنا نصل إلى لب الدليل : لقد فرضنا أنه فى أى متسلسلة يجب أن يكون هناك طريقة محددة لتحديد الأعداد الترتيبية للحدود . وهذه الخاصية تنتمى لمتسلسلة من حد واحد ، كما تنتمى لكل متسلسلة لها $1 +$ من الحدود ، إذا كانت تنتمى لكل متسلسلة لها m من الحدود . وبناء على ذلك بواسطة الاستنباط الرياضى تنتمى لجميع المتسلسلات التى لها عدد متناه من الحدود . ولكن إذا سلمنا بأن عدد الحدود ليس متناهياً ، لانهار الدليل بكاه .

وفيما يختص بـ (ب) و (ج) الدليل متشابه . كل متسلسلة لها عدد متناه من الحدود فيمكن أن نبين بالاستنباط الرياضى أن لها حداً أول وحداً آخر ، ولكن لا توجد طريقة لإثبات ذلك فيما يختص بالمتسلسلات الأخرى ، أو لإثبات أن جميع المتسلسلات متناهية . وبالاختصار ، الاستنباط الرياضى ، مثل بديهية التوازى ، نافع ومناسب فى موضعه الصحيح ، ولكن أن نفترض أنه صادق دائماً فهذا يسلمنا إلى استبداد مجرد الهوى . ومن أجل ذلك كانت أدلة فلاسفة التناهى قائمة على مبدأ يجهلونه ، ولا سبب يدعونا إلى إثباته ، وكل سبب

يدعو إلى نفيه . وبهذه النتيجة يمكن اعتبار النقائص الظاهرة قد حلت .

١٨٥ - بقی أن ننظر ما أنواع المقدار التي تحقق القضايا (١) ، (٢) ، (٣) . وليس ثمة مبدأ عام على أساسه يمكن إثبات هذه القضايا أو دحضها ، ولكن هناك بكل تأكيد أحوال تكون فيها صادقة وأخرى كاذبة . ويسلم الفلاسفة بوجه عام أن الأعداد منفصلة أساساً ، على حين أن المقادير متصلة أساساً . وسنرى أن الأمر ليس على هذه الحال . فالأعداد الحقيقية لها أكل اتصال معروف ، على حين ليس لأنواع كثيرة من المقادير أى اتصال ألبتة . ولفظة «الاتصال» لها معان كثيرة ، ولكن في الرياضيات لها معنيان فقط ، أحدهما قديم والآخر جديد . ولأغراضنا الحاضرة يكفي المعنى القديم ، ولهذا سأضع في الوقت الحاضر التعريف الآتي :

«الاتصال» ينطبق على المتسلسلات (وعلى المتسلسلات فقط) حيناً تكون هذه المتسلسلات بحيث يكون هناك حد بين أى حدين معلومين ^(١) . وكل ما ليس متسلسلة أو مركباً من متسلسلات ، أو كل متسلسلة لا تحقق الشرط المذكور سابقاً ، فهو غير متصل .

وهكذا فإن متسلسلة الأعداد المنطقية متصلة ، لأن الوسط الحسابي لاثنيين منها هو دائماً عدد منطقي ثالث بين الاثنين . وحروف الأبجدية ليست متصلة . وقد رأينا أن أى حدين في متسلسلة فيبينهما مسافة ، أو امتداد له مقدار . وما دام هناك بكل تأكيد متسلسلات منفصلة (مثل الأبجدية) فهناك بكل تأكيد مقادير متفصلة ، وهي المسافات أو امتدادات الحدود في المتسلسلات المنفصلة . والمسافة بين الحرفين ا و ح أكبر من المسافة بين ا و ب ، ولكن ليس ثمة مقدار هو أكبر من واحد منهما وأصغر من الآخر . وفي هذه الحالة يوجد كذلك أكبر مسافة ممكنة ، وأصغر مسافة ممكنة بحيث تنهار جميع القضايا الثلاث (١) ، (٢) ، (٣) . ومع ذلك فلا ينبغي افتراض أن القضايا الثلاث

(١) الاعتراض على هذا التعريف (كما سنرى في الجزء الخامس) هو أنه لا يطلى الخصائص العادية لوجود النهايات للمتسلسلات التقاربية التي ترتبط عادة بالاتصال - والمتسلسلات من النوع السابق تسمى «المحكمة» Compact ، ما عدا في المناقشة الحاضرة .

لها أى ارتباط ضرورى . ففى حالة الأعداد الصحيحة مثلاً هناك مسافات متعاقبة ، وهناك أصغر مسافة ممكنة وهى تلك التى بين عددين صحيحين متعاقبين ، ولكن لا توجد أكبر مسافة ممكنة . وهكذا فإن (٣) صادقة ، على حين (١) ، (٢) كاذبتان . وفى حالة متسلسلة النغمات ، أو الألوان فى قوس قزح ، للمتسلسلة بداية ونهاية ، بحيث يكون هناك أكبر مسافة ، ولكن لا يوجد أصغر مسافة ، وهناك حد بين أى اثنين . وهكذا فإن (١) ، (٢) صادقتان على حين أن (٣) كاذبة . أو مرة أخرى إذا أخذنا المتسلسلة المركبة من صفر ومن الكسور التى يؤخذ واحد منها بسطاً ، فهناك أكبر مسافة ، ولكن ليس هناك أصغر مسافة مع أن المتسلسلة منفصلة . وهكذا فإن (٢) صادقة على حين أن (١) ، (٣) كاذبتان . ويمكن الحصول على توافيق أخرى من متسلسلات أخرى .

وهكذا فإن القضايا الثلاث (١) ، (٢) ، (٣) ليس بينها ارتباط ضرورى ، وجميعها أو أى منها قد تكون كاذبة حين تطبق على أى نوع معلوم من المقدار . ولا يمكننا أن نأمل إذن فى إثبات صدقها من طبيعة المقدار . وإذا كان لا بد أن تكون صادقة فينبغى إثباتها مستقلة ، أو نكشف عنها بمجرد الفحص فى كل حالة خاصة . أما أنها تكون صادقة فى بعض الأحيان فيظهر من النظر إلى المسافات بين الحدود فى المتصل العددي number-continuum أو فى الأعداد المنطقية . فكل من هاتين المتسلسلتين متصل بالمعنى المذكور آنفاً وليس له حد أول أو أخير (حين نستبعد الصفر) . وعلى ذلك فإن مسافاتهما أو امتداداتهما تحقق جميع الشروط الثلاثة . ويمكن أن نستدل على نفس الشيء من المكان أو الزمان ، ولكنى لا أود استيقاق ما سنقوله عنهما . وكيات الانقسام لا تحقق هذه الشروط حين تكون الكلاآت التى تقبل الانقسام مشتملة على عدد متناه من الأجزاء اللامتنقصة . ولكن حيث يكون عدد الأجزاء لامتناهياً فى فصل بأسره من المقادير المختلفة ، فإن جميع الشروط الثلاثة تتحقق كما يظهر من خصائص المتصل العددي .

وهكذا نرى أن مشكلتي اللانهاية والاتصال ليس لهما ارتباط جوهري بالكمية ولكنهما يرجعان إذا أنارتكما المقادير إلى مميزات تعتمد على العدد والترتيب . ومن ثم فإن مناقشة هاتين المشكلتين إنما يمكن الخوض فيها بعد عرض نظرية الترتيب البحث (١) . وهذا هو غرضنا من الجزء القادم .

١٨٦ - يمكن أن نلخص الآن النتائج التي حصلنا عليها من الجزء الثالث .
 ففي الباب التاسع عشر استقر بنا الرأي على تعريف المقدار بأنه كل ما كان أكبر أو أصغر من شيء ما آخر . ووجدنا أن المقدار ليس له ارتباط ضروري بالانقسام ، وأن الأكبر والأصغر لاعمرفان . ورأينا أن كل مقدار له علاقة معينة - شبيهة بالاستغراق في فصل ، ولكنها غير متطابقة معه - بكيفية معينة أو علاقة معينة . وهذه الحقيقة هي التي نعبر عنها بقولنا : إن المقدار المذكور هو مقدار « ل » تلك الكيفية أو العلاقة . وعرفنا « الكمية » بأنها جزئي يشتمل المقدار عليه ، أى على أنه المركب الذي يتألف من مقدار مع وضع زمكاني معين ، أو مع زوج من الحدود ، الكمية « علاقة » بينهما . وقررنا بواسطة مبدأ عام متصل بالعلاقات المتعدية المماثلة أنه من المستحيل أن نقصر أنفسنا على الكميات ، وأن ننكر التجريد الأعظم للدخل في المقادير . وقررنا أن المساواة ليست علاقة مباشرة بين كميات ، ولكنها تقوم على أنها تخصيص لنفس المقدار . وهكذا فإن الكميات المتساوية هي أمثلة لنفس المقدار . وكذلك ليس الأكبر والأصغر علاقتين مباشرتين بين كميات بل بين مقادير . والكميات إنما هي أكبر وأصغر بسبب أنها حالات لمقادير أكبر وأصغر . وأى مقدارين من نفس الكيفية أو العلاقة فأحدهما أكبر والآخر أصغر . والأكبر والأصغر علاقتان متعلقتان متماثلتان .

وبين الحدود التي لها مقدار لا توجد كفيات كثيرة فقط بل علاقات مماثلة بها تتكوّن بعض أنواع التسلسلات . وهذه قد تسمى « مسافات » . وحين توجد مسافات في متسلسلة ، فأى حدين من التسلسلة لهما مسافة متطابقة مع

(١) انظر "Sur la Définition du Continu," *Revue de Métaphysique et de Morale*, 1900.

المسافة الأكبر أو الأصغر بين أى حدين آخرين في التسلسلة . وهناك فصل آخر غريب من المقادير ناقشناه في الباب العشرين يتكون من درجات الانقسام في الكلات المختلفة . وقد رأينا أن هذه هي الحالة الوحيدة التي تكون فيها الكميات منقسمة ، بينما لا يوجد أى حالة على المقادير المنقسمة .

وقد احتاج القياس العددي الذي ناقشناه في الباب الحادى والعشرين إلى معالجة غير عادية بعض الشئ ، نظراً إلى ما قررناه من أن معظم الكميات وجميع المقادير لا تقبل الانقسام . وقد رأينا أن المشكلة تنحصر في وضع علاقة واحد بواحد بين الأعداد والمقادير من النوع المطلوب قياسه ، ووجدنا أن هذا ممكن نظرياً على أساس بعض الفروض الميتافيزيقية (التي لم تُقبل ولم ترفض) وذلك فيما يختص بالموجودات الفعلية أو الممكنة ، ولو أن ذلك في الغالب ليس مما يمكن إجراؤه عملياً ، أو ليس بنى أهمية . أمّا فيما يختص بفصلين من المقادير هما الانقسامات والمسافات ، فقد رأينا أن القياس يسير من اصطلاح طبيعي جداً يعرف المقصود من قولنا (مما لا يمكن أن يكون له المعنى البسيط الذى له فيما يختص بالكلات والأجزاء المتناهية) إن مقداراً واحداً من هذه المقادير هو ضعف مقدار آخر أو مثله من المرات . وناقشنا علاقة المسافة بالامتداد ووجدنا أنه ، بصرف النظر عن بديهية خاصة في هذا الصدد ، لا يوجد سبب أولى لاعتبار المسافات المتساوية منازرة للامتدادات المتساوية .

وناقشنا في الباب الثانى والعشرين تعريف الصفر . ورأينا أن مشكلة الصفر لا صلة لها بمشكلة اللانهاى في الصفر ، من حيث إنها مرتبطة ارتباطاً وثيقاً في الواقع بالمشكلة المنطقية البحث الخاصة بطبيعة السلب ، وقررنا أنه كما يوجد السلب المنطقى المتميز عن السلب الرياضى كذلك يوجد نوع ثالث أساسى هو السلب الكمى . وأن هذا السلب الكمى هو سلب الكيفية أو العلاقة التي للمقادير، لا سلب المقدار عن تلك الكيفية أو العلاقة . ومن ثم يمكننا اعتبار الصفر واحداً من بين المقادير التي يشتمل عليها نوع من المقدار ، وأن نميز الأصفار من أنواع مختلفة . وبيننا أيضاً أن السلب الكمى مرتبط بالسلب المنطقى من حيث

إنه لا يمكن وجود أى كيات مقدارها صفر .

وفى الباب الأخير بينا أن مشكلات الاتصال واللانهاية واللانهائى فى الصفر لا تنتمى بوجه خاص إلى نظرية الكمية بل إلى نظريات العدد والترتيب . وبينما أنه ، ولو أن هناك أنواعاً من المقدار ليس فيها مقدار أكبر أو أصغر ، فإن هذه الحقيقة لا تجعلنا نسلم بوجود مقادير لانهائية أو لانهائية فى الصفر ، وأنه لا تناقض فى افتراض نوع من المقادير تكون متسلسلة فيها حد يين أى اثنين ، وليس فيها تبعاً لذلك أى حد يتعاقب مع حد معلوم . واتضح أن التناقض المزعوم ناشئ من استخدام غير مناسب للاستنباط الرياضى — وهو مبدأ تفترض مناقشته الكاملة النظر فى فلسفة الترتيب .

فهرس

الجزء الثانى

العدد

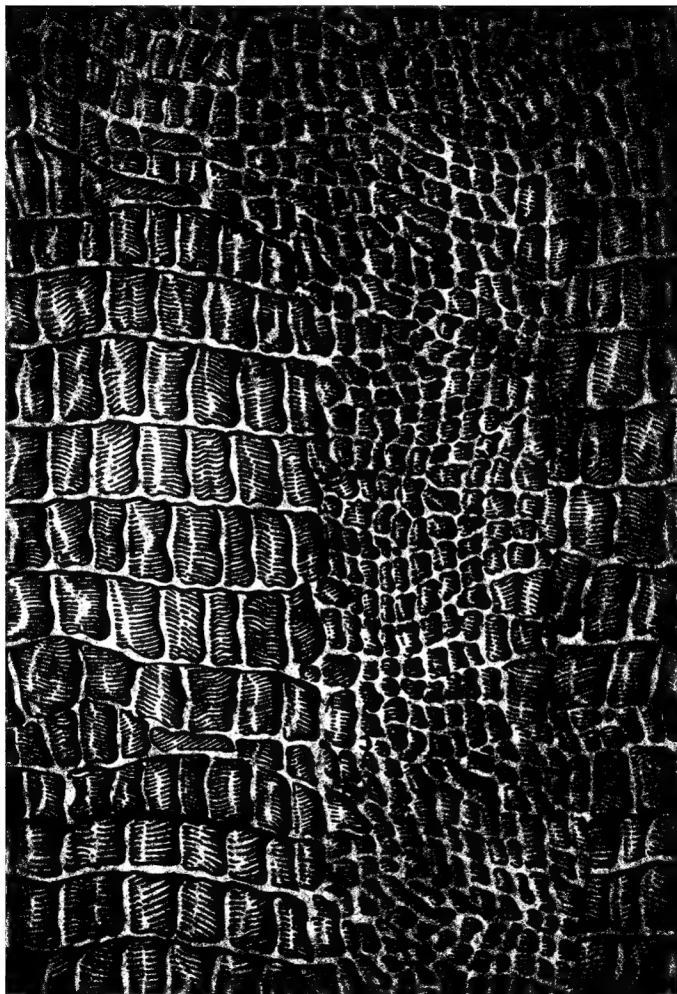
صفحة

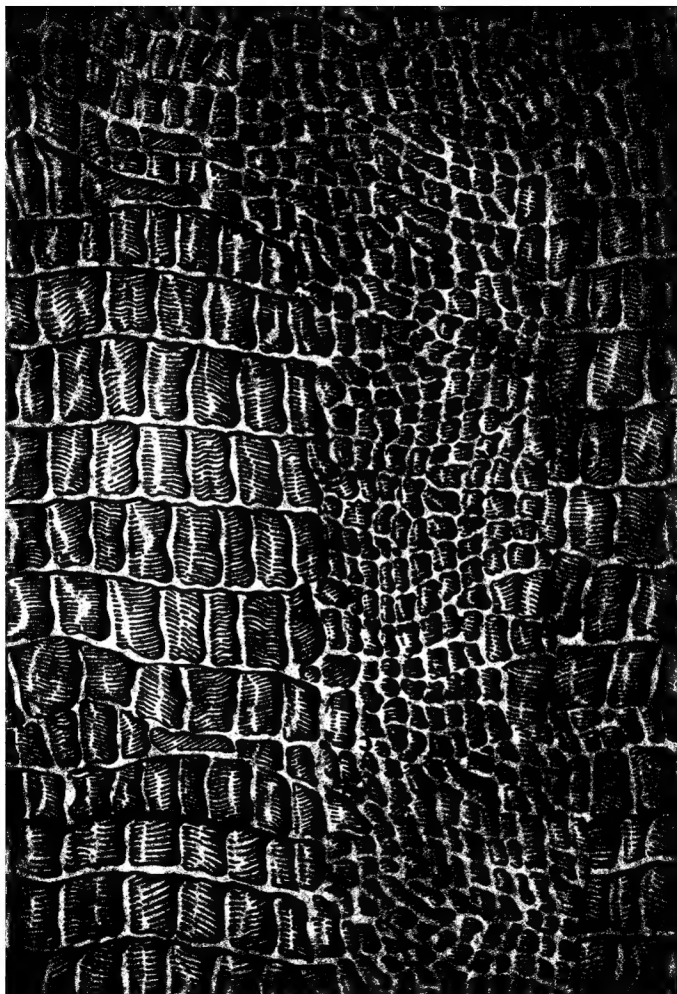
٧	.	.	.	تعريف الأعداد الأصلية	الباب الحادى عشر
١٦	.	.	.	الجمع والضرب	الباب الثانى عشر
٢١	.	.	.	المتناهى واللانهائى	الباب الثالث عشر
٢٥	.	.	.	نظرية الأعداد المتناهية	الباب الرابع عشر
٣٢	.	.	.	جمع الحدود وجمع القصول	الباب الخامس عشر
٤٣	.	.	.	الكل والجزء	الباب السادس عشر
٥١	.	.	.	الكالات غير المتناهية	الباب السابع عشر
٦٠	.	.	.	النسب والكسور	الباب الثامن عشر

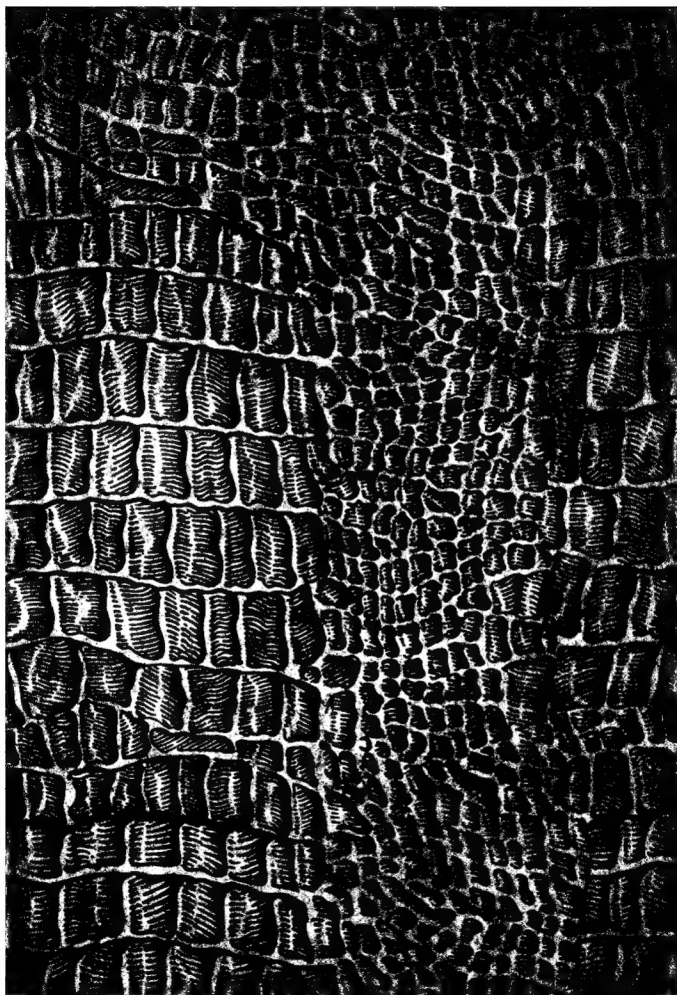
الجزء الثالث

الكمية

٦٩	.	.	.	معنى المقدار	الباب التاسع عشر
٨٧	.	.	.	مدى الكمية	الباب العشرون
٩٥	.	.	.	القياس	الباب الحادى والعشرون
١٠٦	.	.	.	الصفر	الباب الثانى والعشرون
١١٢	.	.	.	اللانهاية، واللامتناهى فى الصفر، والاتصال	الباب الثالث والعشرون







Bibliotheca Alexandrina



0601348